NAZIONALE
B. Prov.
II
1684
NAPOLI
VITT. EM. III
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XXV
Palchetto
Num.° d' ordine 85 2361

B. Prod.
II
1684

Digitized by Google

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE ROYALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Digitized by Google

IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT,
RUE JACOB, N° 24.

610953

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE ROYALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS ET DES MACHINES.

PREMIÈRE PARTIE,

CONTENANT LES LEÇONS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX, ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS EN TERRE, EN MAÇONNERIE ET EN CHARPENTE;

PAR M. NAVIER,

MEMBRE DE L'INSTITUT (ACADÉMIE DES SCIENCES), INGÉNIEUR EN CHEF AU CORPS ROYAL DES PONTS ET CHAUSSÉES.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

PARIS.

CHEZ FIRMIN DIDOT PÈRE ET FILS, LIBRAIRES,

RUE JACOB, N° 24.

MDCCCXXVI.

Digitized by Google

PRÉFACE.

On doit à Galilée les premières tentatives qui aient été faites pour soumettre au calcul la résistance des corps aux efforts qui tendent à les rompre. Jacques Bernouilly, Leibnitz, Euler, La Grange, ont traité diverses questions de ce genre. On a fait sur la force des matériaux un grand nombre d'expériences, parmi lesquelles on doit distinguer celles de Buffon. Coulomb a donné les principes de l'équilibre des voûtes et des murs exposés à la poussée des terres.

Ces recherches ont été jusqu'à présent plus utiles aux progrès des mathématiques qu'au perfectionnement de l'art des constructions. La plupart des constructeurs déterminent les dimensions des parties des édifices ou des machines d'après les usages établis, et l'exemple des ouvrages existants; ils se rendent compte rarement des efforts que ces parties supportent, et des résistances qu'elles opposent. Cela présente peu d'inconvénients, lorsque les ouvrages que l'on exécute ressemblent à ceux que l'on a faits de tout temps, et ne s'écartent pas, dans les dimensions et dans les poids, des limites ac-

coutumées. Mais on ne peut plus en user de la même manière lorsque les circonstances obligent à sortir de ces limites, ou lorsqu'il s'agit d'édifices d'un genre nouveau, et sur lesquels l'expérience n'a rien appris.

L'objet de ces résumés est d'exposer les conditions de l'établissement des constructions que les ingénieurs dirigent, et de mettre à même de vérifier le degré de résistance de chacune de leurs parties. On s'est occupé principalement des ouvrages en charpente, sur lesquels on trouve peu de détails dans les livres, et l'on croit devoir indiquer ici succinctement les principes d'après lesquels les questions ont été traitées.

On considère dans les matériaux deux qualités principales, la force d'élasticité, et la résistance à la rupture. Par *force d'élasticité,* on entend la résistance que le corps oppose, quand on veut l'allonger ou l'accourcir d'une très-petite quantité. Le rapport entre le poids qui allonge ou comprime, en agissant sur une section transversale égale à l'unité superficielle, et la fraction qui exprime la variation de la longueur naturelle causée par ce poids, est la mesure de cette force : c'est la quantité désignée par E dans le n° 47. Par *résistance à la rupture,* on entend l'effort qu'il faut faire pour séparer les parties du corps, en agissant par extension; ou l'effort qu'il faut faire pour écraser ces parties, en

agissant par compression. Le poids qui opère l'un ou l'autre effet, en agissant sur une section transversale égale à l'unité superficielle, est la mesure de cette résistance : c'est la quantité désignée par R dans le n° 75.

La force d'élasticité et la résistance à la rupture doivent être recherchées par l'expérience, pour les diverses espèces de matériaux, et l'on s'est efforcé de rassembler tous les résultats de ce genre qui ont paru de quelque utilité.

La connaissance de la force d'élasticité donne les moyens de calculer la quantité dont une pièce de charpente peut se comprimer, s'allonger, ou fléchir sous une charge donnée. La connaissance de la résistance à la rupture permet de déterminer la limite des poids qu'une pièce peut supporter. Mais cela ne suffit pas pour l'établissement des constructions, parce qu'il s'agit de connaître, non pas le poids qui rompt une pièce, mais le poids dont on peut la charger sans que l'altération qu'elle subit augmente avec le temps. La recherche de cette dernière limite, qui est de la plus grande importance, peut être rarement l'objet d'expériences directes ; mais on peut ici se servir avec avantage des exemples fournis par les constructions existantes.

Nous remarquons qu'en cédant aux efforts auxquels elles sont exposées, les parties des pièces s'accourcissent ou s'allongent, et nous prenons

la proportion de cette variation de longueur pour la mesure du degré d'altération de ces parties. Connaissant donc quelle est, dans les constructions dont l'expérience constate la solidité, la quantité dont les fibres qui subissent les plus grandes variations de longueur sont allongées ou accourcies, nous regardons ces variations comme des limites que l'on peut atteindre, et qui ne peuvent être dépassées sans danger. A ces variations de longueur correspondent des efforts qui seraient capables de les produire, en agissant directement par tension ou par compression. Ces efforts sont regardés comme étant les plus grands que les fibres puissent supporter; et la pièce, pour l'établissement d'une nouvelle construction, est censée prête à rompre quand ces efforts ont lieu. C'est ainsi qu'en attribuant à la quantité R une valeur beaucoup moindre R′ (voyez le n° 124), les formules relatives aux cas de rupture peuvent servir à calculer les dimensions qui doivent être attribuées aux pièces dans les constructions.

Pour donner un exemple de ces évaluations, on dira que la force d'élasticité du fer forgé est E = 20 000 000 000 kil.; c'est-à-dire que ce poids, agissant sur une barre dont la section transversale serait un mètre quarré, allongerait ou accourcirait cette barre d'une quantité égale à sa longueur primitive, les variations de longueur étant toujours

supposées proportionnelles aux poids qui les produisent. La résistance de la même substance à la rupture est R=40 000 000 kil., parce que ce poids romprait une barre semblable en agissant suivant sa longueur. Enfin, on admet que le fer serait altéré si les fibres étaient allongées ou accourcies de plus des 0,0005 de leur longueur naturelle ; et comme cette variation de longueur serait produite par un poids de 10 000 000 kil. agissant sur la même barre, on attribue cette dernière valeur à la constante R′, et l'on regarderait dans une construction une barre de fer forgé comme étant trop chargée, si les fibres les plus tendues ou les plus comprimées supportaient un effort de plus de 10 000 000 kil. sur un mètre superficiel.

Ces notions admises, tout se réduit à rechercher, dans chaque construction, l'effet des efforts auxquels elle est exposée pour allonger ou accourcir les parties des pièces, soit par une action dirigée dans le sens de la longueur, soit par une action oblique ou transversale, qui oblige la pièce à fléchir, et par conséquent allonge les fibres placées à la face convexe, et accourcit celles qui sont placées à la face concave. Les résultats qui avaient été donnés jusqu'à présent sur l'équilibre des solides élastiques ne s'appliquaient qu'à un petit nombre de cas. Mais au moyen des nouvelles questions qui ont été résolues, on peut aujourd'hui se rendre

compte de la force des principales pièces, dans les constructions en charpente que les ingénieurs dirigent, avec la même facilité et la même exactitude que l'on se rend compte de la force des chaînes, dans un pont suspendu.

L'élément principal des calculs est l'évaluation des limites des efforts que l'on peut faire supporter aux parties des divers matériaux. Cette évaluation, établie d'après l'expérience des constructions existantes, n'est pas susceptible d'une rigoureuse exactitude. Il pourra donc exister quelques différences dans les nombres qui seront adoptés par diverses personnes. Le temps, et la réunion d'un grand nombre de comparaisons, peuvent seuls fixer les idées sur ce sujet.

Les règles relatives à l'équilibre des murs de revêtement des terres ou des voûtes avaient été exposées dans d'autres ouvrages; mais il était nécessaire d'avoir égard, comme on l'a fait ici, à la possibilité des disjonctions dans les murs ou dans les pieds-droits, que l'on considérait ordinairement comme des corps d'une seule pièce.

Les ingénieurs, en préparant les projets des travaux qu'ils dirigent, suivent ordinairement une marche analogue à ce qu'on nomme dans les sciences la méthode de fausse position. C'est-à-dire qu'après avoir conçu et décrit par le dessin la disposition d'un ouvrage, ils examinent s'ils ont rempli

toutes les conditions auxquelles il s'agissait de satisfaire, et rectifient leur projet jusqu'à ce qu'ils y soient parvenus. Parmi ces conditions, l'une des plus essentielles est l'économie : la solidité et la durée ne sont pas moins importantes. Au moyen des règles exposées dans ces résumés, on pourra connaître dans chaque cas des limites que l'on ne pourrait dépasser sans exposer l'ouvrage à manquer de solidité. Il ne faudrait pas conclure, d'ailleurs, que l'on doit toujours, pour avoir égard à l'économie, se placer tout près de ces limites. Les différences que l'on trouve dans les qualités des matériaux, et plusieurs autres motifs s'y opposent; l'art consiste principalement à juger jusqu'à quel point il est permis de s'en approcher.

Digitized by Google

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE ROYALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS ET DES MACHINES.

PREMIÈRE PARTIE.

PREMIÈRE SECTION.

DE LA RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES.

1. Un corps solide oppose de la résistance à un effort qui tend à le fléchir ou à le rompre. En recherchant les lois auxquelles cette propriété est assujettie, on peut se proposer deux objets principaux : 1°, étant donné la figure d'un corps, et les efforts qu'il doit supporter, reconnaître si ce corps doit fléchir, et de quelle quantité, ou s'il doit rompre; 2° déterminer la figure d'un corps de manière qu'il présente, sous le moindre volume, la plus grande résistance possible à un effort donné.

Les corps paraissent être composés de parties ou.

molécules, maintenues à certaines distances les unes des autres, par des forces opposées qui se font mutuellement équilibre. L'une de ces forces est une attraction propre aux molécules des corps; l'autre est une force de répulsion due au principe de la chaleur. Le jeu de ces forces d'attraction et de répulsion rend raison des principaux phénomènes qui ont lieu quand on entreprend de changer la figure d'un corps. C'est évidemment dans la considération des forces dont il s'agit, qu'il faut chercher la solution directe des problèmes relatifs à la résistance des solides.

Les recherches générales, fondées sur ces notions, sont trop compliquées pour que l'on puisse les présenter dans un cours élémentaire. On se bornera à déduire des résultats simples et applicables, d'hypothèses dont la justesse ait été vérifiée par des comparaisons nombreuses avec les effets naturels.

2. Nous considérons, pour fixer les idées, un corps prismatique. Ce corps peut être soumis à divers efforts, parmi lesquels on distingue principalement:

1° Un effort dirigé dans le sens de la longueur du solide, de manière à le comprimer. Le solide peut céder en s'écrasant, ou bien en pliant et en rompant, si la longueur est suffisamment grande par rapport aux dimensions de la section transversale.

2° Un effort dirigé dans le sens de la longueur du solide, de manière à l'étendre. Le corps peut céder en s'allongeant, et en se rompant par la séparation des parties dans une des sections transversales.

3° Un effort dirigé perpendiculairement à la longueur du corps. Le corps cède en pliant, de manière que les parties voisines de la face convexe sont étendues, et celles voisines de la face concave comprimées.

La rupture a lieu si l'extension ou la compression sont assez grandes pour déterminer la séparation ou l'écrasement des parties.

4° Un effort qui tend à tordre le corps.

ARTICLE PREMIER.

De la résistance des corps à un effort qui tend à produire l'écrasement.

3. Les notions que l'on peut présenter sur cette matière, consistent principalement dans l'exposition des résultats des expériences faites sur divers corps. Les résultats suivants conviennent seulement aux corps dont la longueur est trop petite, par rapport aux dimensions de la section transversale, pour qu'ils puissent céder en pliant.

Résistance de la pierre et de la brique à l'écrasement.

4. On a déduit des expériences faites sur la résistance des pierres à l'écrasement, les indications générales suivantes. Les qualités physiques des pierres, telles que la dureté, la pesanteur spécifique, la couleur, ne peuvent faire juger exactement de la résistance. On ne la connaît que par des expériences spéciales; mais, dans les pierres de même nature, les parties les plus denses sont aussi les plus résistantes. On distingue parmi les pierres deux qualités principales, relativement à la manière dont elles cèdent à la pression. Les pierres dures, dont le grain est fin, l'aggrégation homogène et compacte, se divisent avec bruit en lames ou en aiguilles verticales, avant de se réduire en

poussière. Les pierres tendres se divisent d'abord en pyramides qui ont pour bases les faces du solide, et dont le sommet est au centre : les deux pyramides verticales écartent les autres, en agissant comme des coins; elles se partagent toutes en petits prismes verticaux, et finissent par tomber également en poussière. Certaines pierres, qui offrent dans les expériences une plus grande résistance que d'autres, peuvent dans une construction éclater plus facilement, si elles ne sont pas pressées bien également sur toute l'étendue du joint.

La force nécessaire pour écraser un morceau de pierre est, pour des figures semblables, proportionnelle à l'aire de la section transversale ; elle diminue quand le contour de cette section augmente par rapport à l'aire; elle est la plus grande quand la section transversale est un quarré ou un cercle (*a*).

Quant à l'influence du rapport de la hauteur à l'aire de la section transversale, la force nécessaire pour produire l'écrasement est la plus grande quand la pierre a la forme d'un cube. Cette force diminue à mesure que la pierre est plus plate ou plus haute. Elle diminue davantage encore, si la pierre est partagée en plusieurs parties dans la hauteur (*b*).

La situation dans l'intérieur de la pierre, de l'échantillon soumis à l'expérience, influe sensiblement sur les résultats. La résistance des parties voisines des faces supérieure et inférieure, est moindre que celle des parties intérieures (*c*).

(*a*) Art de bâtir, par M. Rondelet, tome I, pages 94 et suiv.

(*b*) *Idem*, page 91.

(*c*) *Idem*, pages 83 et suiv.

Digitized by Google

Il a été fait un grand nombre d'expériences sur la résistance des pierres à l'écrasement. Les premières sont de M. Gauthey; il employait une machine formée d'un levier. M. Rondelet a employé une machine semblable; il en propose une où la pression est produite par une vis, et qui paraît préférable.

5. Résultats moyens des expériences de M. Gauthey (*a*). Ces expériences ont été faites sur de petits parallélipipèdes, dont les dimensions ont varié de 4 à 48 lignes, et étaient généralement de 10 à 20 lignes. Les résultats sont ramenés par le calcul à une surface d'un pied quarré.

INDICATION DES PIERRES.	Poids du pied cube.	Moindre valeur	Moyenne valeur	Plus grande valeur
		du poids qui produit l'écrasement.		
	livres.	livres.	livres.	livres.
Porphyre	201	4299112	5329152	5619456
Marbre de Flandre	184	1824768	2239488	2159200
Marbre de Gênes	189	691472	770688	1002240
Pierre calcaire dure de Givry	165	456192	663552	870911
Pierre calcaire tendre de Givry	145	186624	248832	311040
Pierre calcaire blanche de Tonnerre	120	181440	222912	279836
Brique dure	109	290304	321403	373248
Grès tendre	174	5390	8424	186586

On trouvera le résistance à l'écrasement, exprimée en kilogrammes pour une surface d'un centimètre quarré, en multipliant les nombres des trois dernières colonnes par 0,000464.

(*a*) Mémoire sur la charge que peuvent porter les pierres. Journal de physique, novembre, 1774.

6. Résultats principaux des expériences de M. Rondelet (*a*). Ces expériences ont été faites sur de petits cubes de 0^m, 05 de côté, en sorte que l'aire de la base est 25 centimètres quarrés.

INDICATION DES PIERRES.	PESANTEUR spécifique.	POIDS produisant l'écrasemeot.
Pierres volcaniques.		kilogrammes.
Basalte de Soède	3,06	47809
Basalte d'Auvergne	2,88	51945
Lave du Vésuve, dite *Piperno*, près de Ponzzol	2,60	14802
Lave grise des enviroos de Rome, peu dore, dite *Peperino*	1,97	5700
Lave tendre de Naples	1,72	4014
Tuf de Rome	1,22	1447
Scorie de volcao	0,86	831
Pierre ponee	0,60	863
Granits.		
Granit vert des Vosges	2,85	15487
Graoit gris de Bretagne	2,74	16353
Granit de Normandie, dit *Gatmos*	2,66	17555
Graoit gris des Vosges	2,64	10581
Grès.		
Grès très-dor, roossâtre	2,52	20337
Grès blanc	2,48	23086
Grès teodre	2,49	98
Pierres argilleuses.		
Pierre porc, oo puante	2,66	17030
Pierre grise de Florence, dont le grain est fin	2,56	10556
Pierres calcaires.		
Marbre ooir de Flaodre	2,72	19719
Marbre blaoc veiné	2,70	7455
Marbre blaoc atatoaire	2,69	8176
Marbre blanc turquin	2,67	7695
Pierre de Caserte, près de Naples, qoi reçoit le poli	2,72	14865

(*a*) Art de bâtir, par M. Rondelet, tome I, pages 208 et suiv.

Pierre noire de Saint-Fortunat, employée à Lyon, très-dure et coquilleuse	2,65	15668
Liais de Bagneux, près de Paris, très-dur, d'un grain fin	2,44	11113
Travertino de Rome, très-dur, d'un grain fin, persillé	2,36	7449
Roche de Châtillon, près de Paris, dure, un peu coquilleuse	2,29	4347
Roche douce de Châtillon	2,08	3339
Roche d'Arcueil, près de Paris	2,30	6334
Pierre de Saillancourt, près de Pontoise, 1re qualité	2,41	3536
2e qualité	2,29	2994
3e qualité	2,10	2304
Pierre ferme de Conflans, employée à Paris	2,07	2245
Pierre tendre ou lambourde de Conflans, 1re qual.	1,82	1407
Pierre à plâtre de Montmartre, près de Paris	1,92	1785
Vergelée, des environs de Paris, tendre, d'un grain grossier, résistant à l'eau	1,83	1496
Lambourde de qualité inférieure, tendre, résistant mal à l'humidité	1,56	575

7. Principaux résultats des expériences de M. G. Rennie (*a*). Ces expériences ont été faites sur de petits cubes, ayant 1 $\frac{1}{2}$ pouce anglais de côté.

INDICATION DES PIERRES.	Pesanteur spécifique.	Poids produisant l'écrasement.
Granits.		Livres avoir du poids.
Granit d'Aberdeen, bleu	2,625	24556
Granit à grain serré de Peterhead		18636
Granit de Cornouailles	2,662	14302
Pierres siliceuses.		
Pierre silicense de Dundée	2,530	14918
Pierre siliceuse de Brammlfall, près de Leyde, parallèlement ou perpendiculairement aux couches	2,506	13632
Grit de Derby, pierre siliceuse, rouge et friable	2,316	7070

(*a*) *Philosophical transactions*, 1818; ou Annales de chimie et de physique, septembre, 1818.

Pierres calcaires.		
Marbre blanc italien, veiné.....	2,726	21783
Marbre blanc de Brabant.....	2,697	20742
Pierre à chaux noire et compacte, de Limerick..	2,598	19924
Marbre rouge de Devonshire.....		16712
Pierre de Portland, d'un grain fin et égal (le cube ayant 2 pouces de côté).....	2,423	14918
Idem, (le cube ayant 1 ½ pouce de côté).....	2,428	10284
Brique.		
Brique de Stourbridge.....		3864
Brique de Hammersmith.....		2254
Idem, brûlée.....		3243
Brique rouge, moyenne de deux épreuves.....	2,168	1817
Brique rouge pâle.....	2,085	1263
Chaux.....		1127

On trouvera la résistance à l'écrasement, exprimée en kilogrammes pour une surface d'un centimètre quarré, en multipliant les nombres de la dernière colonne par 0,03156.

Résistance du plâtre à l'écrasement.

8. D'après M. Rondelet (*a*), le poids nécessaire pour écraser un cube de 5 centimètres de côté est, pour le plâtre gâché à l'eau..... 1239 kil.
et pour le plâtre gâché au lait de chaux.... 1816

Résistance du mortier à l'écrasement.

9. La résistance du mortier est très-variable, suivant les matières employées et les procédés de fabrication. Le tableau suivant est dressé d'après les expériences de M. Rondelet.

(*a*) Art de bâtir, tome I, page 309.

INDICATION DES MORTIERS.	PESANTEUR spécifique.	POIDS porté sur une base de 25 centim. quarrés.
		kilogrammes.
Mortier de chaux et sable de rivière.....	1,63	767
Le même, battu.....	1,89	1048
Mortier de chaux et sable de mine.....	1,59	1017
Le même, battu.....	1,90	1406
Mortier de ciment, ou tuileaux pilés.....	1,46	1191
Le même, battu.....	1,66	1633
Mortier en grès pilé.....	1,68	733
Mortier de pouzzolane de Naples et de Rome, mêlées.....	1,46	916
Le même, battu.....	1,68	1333
Enduit d'une conserve antique des environs de Rome.....	1,55	1903
Enduit en ciment des démolitions de la Bastille..	1,49	1368

Les expériences ont été faites dix-huit mois après la fabrication des mortiers. Quinze ans après, elles ont été répétées, et on a reconnu que la consistance avait augmenté d'environ $\frac{1}{8}$ pour les mortiers de chaux et sable, et $\frac{1}{4}$ pour les mortiers de ciment et de pouzzolane (*a*).

Résistance du bois à l'écrasement.

10. D'après les expériences de M. Rondelet, la force nécessaire pour écraser un cube en bois de chêne, est de 40 à 48 livres par ligne quarrée de la base (385 à 462 kil. par centimètre quarré). Elle ne diminue pas sensiblement pour un prisme dont la hauteur ne surpasse pas sept ou huit fois l'épaisseur, et qui ne peut plier.

(*a*) Art de bâtir, tome I, page 305. Consultez aussi les Recherches expérimentales sur les chaux de construction, de M. Vicat.

La même force, pour le sapin, est de 48 à 56 liv. (*a*) (462 à 538 kil. par centimètre quarré).

11. D'après les expériences de M. G. Rennie (*b*), l'effort nécessaire pour écraser un cube de 1 pouce anglais de côté, est, pour

le chêne anglais.....	3860	liv. av. du poids.
le sapin blanc.....	1928	
le pin d'Amérique.....	1606	
l'orme.....	1284	

La résistance exprimée en kilogrammes, pour un centimètre quarré, se déduit des nombres précédents, en les multipliant par 0,07028.

12. Lorsqu'une pression est exercée contre la surface d'une pièce de chêne, si l'on veut que cette surface ne cède point sensiblement, il faut, suivant M. Gauthey (*c*), que l'effort ne surpasse point 160 kil. par centimètre quarré, lorsque la surface pressée est parallèle aux fibres, et 200 kil. lorsque cette surface est perpendiculaire aux fibres.

13. D'après les expériences de M. Tredgold (*d*), l'effort exercé contre une face pressée parallèlement aux fibres, ne doit point dépasser 1400 livres avoir du poids par pouce quarré anglais pour le chêne, et 1000 liv. pour le sapin jaune (108 et 70 kil. par centimètre quarré).

(*a*) Art de bâtir, tome IV, page 67.

(*b*) *Philosophical transactions*, 1818; ou Annales de chimie et de physique, septembre, 1818.

(*c*) Traité de la construction des ponts, tome II, page 44.

(*d*) *Elementary principles of carpentry*, page 60.

Ces résultats supposent les bois secs et de bonne qualité.

Résistance du fer forgé à l'écrasement.

14. D'après les expériences de M. Rondelet (*a*), un cube en fer forgé, de 6 à 12 lignes de côté, commence à se comprimer sous une pression moyenne de 513 livres par ligne quarrée (4945 kilog. par centimètre quarré). Le fer cède plutôt en pliant qu'en se comprimant, lorsque la hauteur est triple de l'épaisseur.

Résistance du fer fondu à l'écrasement.

15. D'après les expériences de M. W. Reynolds de Ketley (*b*), la force nécessaire pour écraser un cube de $\frac{1}{4}$ pouce anglais de côté, en fonte grise et douce, est..... 8960 liv. av. du poids.
en métal de canon..... 22400

(*a*) Art de bâtir, tome IV, page 519.

(*b*) *A Practical essay on the strength of cast iron*, page 128. Il paraît, d'après cet ouvrage, que les résultats obtenus par M. Ketley n'avaient pas été rapportés exactement dans le mémoire de M. G. Rennie, inséré dans le volume des *Philosophical transactions* pour 1818.

16. Résultats principaux des expériences de M. G. Rennie sur l'écrasement du fer fondu (*a*).

FER MIS EN EXPÉRIENCE.	PESANTEUR spécifique.	CÔTÉ de la base quarrée.	HAUTEUR.	POIDS produisant l'écrasement.
		Pouce anglais.	Pouce anglais.	Livres avoir du poids.
Fer tiré du centre d'une large masse, dont les cristaux avaient la forme et l'apparence de ceux qu'on voit dans la rupture d'un canon même métal.....	7,033	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1440
Fer tiré d'une petite coulée, à grain serré, d'un gris terne.	6,977	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	2116
			$\frac{3}{8}$	2363
			$\frac{4}{8}$	2005
			$\frac{5}{8}$	1407
			$\frac{6}{8}$	1743
			$\frac{7}{8}$	1594
			$\frac{8}{8}$	1439
Fer tiré de la première masse..		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	9773
Cubes tirés de barres coulées horizontalement.....	7,113	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	10114
Cubes tirés de barres coulées verticalement.....	7,074	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	11137
Prismes de diverses hauteurs en fer coulé horizontalement..		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	9449
			$\frac{3}{8}$	9006
			$\frac{5}{8}$	8845
			$\frac{6}{8}$	8362
			$\frac{7}{8}$	6430
			$\frac{8}{8}$	6321
Idem, en fer coulé verticalement.....		$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	9328
			$\frac{5}{8}$	8385
			$\frac{6}{8}$	7896
			$\frac{7}{8}$	7018
			$\frac{8}{8}$	6430

(*a*) *Philosophical transactions*, 1818; ou Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

Résistance de divers métaux à l'écrasement.

17. D'après les mêmes expériences, l'effort nécessaire pour écraser un cube de $\frac{1}{4}$ pouce anglais de côté en cuivre coulé est..... 7318 liv. av. du poids.

Pour comprimer un cube semblable		
en cuivre jaune, de	$\frac{1}{10}$	3213
	$\frac{1}{5}$	10304
en cuivre battu, de	$\frac{1}{10}$	3427
	$\frac{1}{6}$	6440
en étain coulé, de	$\frac{1}{10}$	552
	$\frac{1}{3}$	966
en plomb coulé, de	$\frac{1}{2}$	483

Les nombres précédents, ceux de la dernière colonne du tableau n° 16, lorsque le côté de la base est $\frac{1}{4}$ pouce anglais, et ceux du n° 15, doivent être multipliés par 1,125 pour donner en kilogrammes la résistance sur un centimètre qnarré.

ARTICLE II.

De la résistance des corps à un effort dirigé dans le sens de la longueur, qui tend à produire l'extension et la rupture.

18. En considérant un corps tiré dans le sens de la longueur, on peut se proposer de connaître deux choses : 1° la quantité dont ce corps est susceptible de s'allonger pour un effort donné ; 2° l'effort nécessaire pour séparer les parties, et opérer la rupture. Il n'existe presque aucune expérience directe, faite dans la vue de

déterminer la quantité dont un corps s'allonge sous un effort donné; mais, comme on le verra dans la suite, cette détermination peut être conclue des expériences faites sur la flexion. La résistance à la rupture des corps tirés dans le sens de la longueur, est l'objet dont on s'est le plus occupé, et le seul dont il s'agira dans cet article. Les notions à présenter sur ce sujet se bornent encore ici à l'exposition des résultats fournis par l'expérience.

Résistance de la pierre et de la brique à l'extension.

19. D'après Coulomb (*a*), la force nécessaire pour opérer la rupture sur une surface d'un pouce quarré est, pour une pierre blanche, d'un grain fin et homogène, de 215 livres (14^k, 4 par centimètre quarré); pour de la brique de Provence, très-bien cuite et d'un grain très-uni, de 280 à 300 livres (18^k,7 à 20^k par centimètre quarré).

20. D'après M. Tredgold, la même force, sur un pouce quarré anglais, est, pour la brique, de 275 livres avoir du poids (*b*); pour la pierre calcaire de Portland, de 857 livres avoir du poids (*c*) (19^k, 3 et 60^k, 2 par centimètre quarré).

Résistance du plâtre à l'extension.

21. D'après M. Rondelet (*d*), la force de cohésion du

(*a*) Mémoires des savants étrangers, 1773.

(*b*) *A Practical essay on the strength of cast iron*, page 150.

(*c*) *Idem*, page 155.

(*d*) Art de bâtir, tome I, page 315.

plâtre est de 60 livres par pouce quarré (4 kilog. par centimètre quarré). La force avec laquelle il adhère aux pierres et aux briques, est environ les $\frac{2}{3}$ de la précédente. Cette force est plus grande pour la pierre meulière et la brique que pour les pierres calcaires. Elle diminue beaucoup avec le temps.

Résistance du mortier à l'extension.

22. D'après M. Rondelet (*a*), la force de cohésion du mortier est environ le $\frac{1}{8}$ de la résistance à l'écrasement. La force avec laquelle il adhère aux pierres et aux briques, surpasse la force de cohésion.

23. D'après M. Vicat (*b*), la force de cohésion sur un centimètre quarré est, pour les mortiers bien faits, à sable quartzeux et chaux éminemment hydraulique, de ..... $9^{kil.}$, 6

mortiers bien faits, à sable quartzeux, et chaux hydraulique ordinaire..... 6, 0

mortiers bien faits, à sable quartzeux et chaux communes, moyennes ou grasses.. 3, 6

mortiers mal faits, communément, au plus.. 1, 5

Résistance du bois à l'extension.

24. D'après les expériences de M. Rondelet (*c*), la force de cohésion du bois de chêne tiré dans le sens des fibres, est 102 livres par ligne quarrée (981 kil. par centimètre quarré).

(*a*) Art de bâtir, tome I, page 315.

(*b*) Recherches expérimentales sur les chaux de construction, page 96.

(*c*) Art de bâtir, tome IV, page 65.

25. Résultats moyens des expériences de M. Barlow (*a*), faites sur des pièces d'environ $\frac{1}{3}$ de pouce de diamètre. Ces résultats sont ramenés par le calcul à exprimer la force nécessaire pour opérer la rupture sur un pouce quarré anglais.

Sapin, 1°.....	12857	liv. av. du poids.
2°.....	11549	
Frêne, 1°.....	17207	
2°.....	16947	
Hêtre.....	11467	
Chêne, 1°.....	9198	
2°.....	11580	
Teak.....	15090	
Buis.....	19891	
Poirier.....	9822	
Mahogany.....	8041	

26. D'après les mêmes expériences, l'adhésion latérale des fibres dans le sapin, c'est-à-dire l'effort nécessaire pour séparer deux parties d'une pièce en les faisant glisser l'une sur l'autre parallèlement aux fibres, est 592 livres avoir du poids par pouce quarré anglais.

27. D'après les expériences de M. Tredgold (*b*), la force de cohésion des bois tirés perpendiculairement à la direction des fibres, est, sur un pouce quarré anglais, pour le

Chêne.....	2316	liv. av. du poids.
Peuplier.....	1782	
Larix.....	de 970 à 1700	

Ces derniers nombres, et ceux des n°s 25 et 26, doi-

(*a*) *An Essay on the strength and stress of timber*, page 73.

(*b*) *Elementary principles of carpentry*, page 29.

vent être multipliés par 0,07028, pour donner en kilogrammes la résistance sur un centimètre quarré.

Résistance du fer forgé à l'extension.

28. Résultats des expériences de M. Perronet, sur des verges de fer quarré, tirées dans le sens de la longueur (*a*).

Longueur des fers.	Équarrissage.	Poids produisant la rupture.	Poids supporté par millimètre quarré.
mètre.	millimètres.	kilogrammes.	kilogrammes.
0,650	12,97	5972	35,5
0,325		6687	39,8
0,162		5502	32,7
0,081		5972	35,5
0,650	9,02	2983	36,7
0,325		3113	38,3
0,650	6,77	2134	46,6
0,325		2369	51,7
0,162		2472	53,9
0,081		2487	54,3
0,650		2159	47,1
Poids moyen par millimètre quarré...			42,9

29. Résultats des expériences de M. Perronet, sur des verges de fer rond, tirées dans le sens de la longueur.

Longueur des fers.	Diamètre.	Poids produisant la rupture.	Poids supporté par millimètre quarré.
mètre.	millimètres.	kilogrammes.	kilogrammes.
0,650	10,15	3020	37,3
0,325		3074	38,0
0,162		3348	41,4

(*a*) Traité de la construction des ponts, par M. Gauthey, tome II, page 154.

0,081	10,15	3368	41,6
0,650	7,88	2717	55,7
0,162		2748	56,3
0,081		2683	55,0
0,650	7,62	1463	32,1
0,325		1662	36,4
0,162		1721	37,7
0,081		1510	33,1
Poids moyen par millimètre quarré..			42,2

30. Résultats des expériences faites par MM. Soufflot et Rondelet (*a*), sur des verges de fer tirées dans le sens de la longueur. La longueur des pièces était un peu plus de 2 pieds.

INDICATION DES FERS.	Largeur des pièces.	Épaisseur des pièces.	Poids produisant la rupture.	Poids supporté par ligne quarrée.
	lignes.	lignes.	livres.	livres.
Fer tout nerf.....	2 $\frac{2}{3}$	2 $\frac{1}{4}$	3542	590
Idem.....	2 $\frac{2}{3}$	2	3374	633
Fer dont la cassure offre un peu de grain.....	6	2 $\frac{1}{2}$	6157	410
Fer dont la cassure offre les $\frac{2}{3}$ de nerf.....	5	2 $\frac{1}{2}$	4874	390
Fer moitié nerf.....	5 $\frac{1}{2}$	3	5524	335
Fer tout nerf.....	6	3	15600	866
Fer offrant un tiers de grain.....	6	3	7800	433
Fer offrant plus de moitié en grain.	6	3	5857	325
Fer offrant un peu de grain.....	3	2	3635	606
Fer tout nerf, de 3 lig. de diamètre.			6600	933
Fer à gros grain, sans nerf.....	4	4	2991	187
Fer à grain moyen, sans nerf....	4	4	3980	249
Fer à grain fin, sans nerf.....	4	4	5840	365
Fer d'un grain moyen, moitié nerf.	4	4	7200	450
Fer tout nerf.....	4	4	10320	645
Fer à gros grain, moitié nerf....	4	4	5840	365
Force de cohésion moyenne sur une ligne quarrée.....				486

La force moyenne est $46^k,8$ par millimètre quarré.

(*a*) Traité de l'Art de bâtir, tome IV, page 500.

31. D'après des expériences faites à Rome, par Poleni (*a*), sur huit petits barreaux de 0^m, 00372 d'équarrissage, la force de cohésion, pour un millimètre quarré, varie de 41^k à 50^k; la valeur moyenne est $44^k,5$.

32. Résultats des expériences de M. Telford (*b*), faites au moyen d'une presse hydraulique. L'action est estimée par la charge d'une soupape de sûreté.

INDICATION DES FERS.	Poids sous lequel la barre s'étend.	Poids produisant la rupture.		Poids supporté par pouce quarré anglais.	
	tonnes.	tonnes.	quint.	tonnes.	quint.
Fer South Wales, 1 $\frac{3}{8}$ po. de diamètre.		43	11	29	6
Idem ..... $\frac{1}{2}$		52	15 $\frac{1}{4}$	29	16
Fer de Staffordshire, $\frac{3}{4}$ pouce de côté.	12	15	5 $\frac{3}{4}$	27	3
Idem ..... 1 $\frac{1}{12}$	32	32	6	27	10
Fer de Welsh, 1 pouce de côté.....	18	29		29	
Fer de Suède, 1 pouce de côté.....	17	29		29	
Fer de vieux morceaux soudés, 1 pouce de côté.....	16	29		29	
Fer commun de Staffordshire, 1 pouce de côté.....	19	31		31	
Fer commun, 2 pouces de diamètre...	45	100		31	16
Force de cohésion moyenne, sur un pouce quarré anglais....				29	5 $\frac{2}{3}$

Le résultat moyen revient à $46^k,1$ pour un millimètre quarré. On le suppose un peu trop élevé, d'après la nature de l'appareil employé pour les expériences.

(*a*) *Memorie istoriche della cupola del tempio Vaticano*, cités dans le Traité de la construction des ponts, tome II, page 395.

(*b*) *An essay on the strength and stress of timber*, page 228; ou Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, page 218.

33. Résultats des expériences du C^e Brown, faites avec une machine dans laquelle l'action est estimée au moyen d'un système de leviers (*a*).

INDICATION DES FERS.	Longueur des pièces.		Extension avant la rupture.	Poids produisant la rupture.		Poids supporté par pouce quarré anglais.
	pi.	po.	pouces.	tonnes.	quint.	tonnes.
Fer de Suède, grain très-petit et serré, 1 $\frac{5}{16}$ po. de côté..	3	6	0 $\frac{3}{16}$	40	19	23,77
Idem.....	3	6	0 $\frac{1}{4}$	39	15	23,19
Idem, 1 $\frac{3}{16}$ pouce de côté.....	3	6	3	33	10	23,75
Vieux fer noir de Russie, 1 $\frac{3}{16}$ pouce de diamètre.....	3	6	2 $\frac{1}{4}$	36	2	26,55
Fer de Welsh, n° 3, 1 $\frac{1}{4}$ po. de côté	3	6	2	38	1	24,35
Fer commun de Welsh, grain très-fin et serré, 1 $\frac{1}{8}$ pouce de côté.....	3	6	0	31		24,90
Fer de Welsh, n° 3, 2 po. de diamètre (s'étendit sous 68 tonnes.).....	12	6	18 $\frac{1}{2}$	82	15	26,33
Fer de Welsh, 1 $\frac{3}{8}$ pouce de diamètre.....	5		7	43	10	26,34
Force de cohésion moyenne, sur un pouce quarré anglais.....						25

Le résultat moyen revient à 39^k,4 pour un millimètre quarré. On le suppose un peu trop faible, d'après la nature de l'appareil employé dans les expériences.

(*a*) *An essay on the strength and stress of timber*, page 232; ou Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, page 220.

34. Résultats moyens des expériences de M. Brunel (*a*), faites sur du fer forgé en petites barres d'environ $\frac{3}{8}$ pouce de côté. Ces résultats sont ramenés à une surface d'un pouce quarré anglais.

	Poids sous lequel la barre s'étend.		Poids produisant la rupture.	
	tonnes.	quint.	tonnes.	quint.
D'après dix expériences sur le meilleur fer du Yorkshire.....	24	11	32	8
D'après dix expériences sur du fer de seconde qualité du Yorkshire.....	22	4	30	8

Résistance du fil de fer à l'extension.

35. D'après Buffon (*b*), deux fils de 2, 26 millimètres de diamètre ont été rompus par des poids de 236 et 242 ^{k}; ce qui revient à 60 ^{k} par millimètre quarré.

36. Résultats moyens des expériences de M. Telford (*c*).

Diamètre des fils.	Poids produisant la rupture.
pouce anglais.	livres avoir du poids.
$\frac{5}{70}$	531
$\frac{1}{10}$	738
$\frac{6}{100}$	277
$\frac{1}{11}$	157
$\frac{1}{10}$	630

Le résultat moyen est 63^{k},6 par millimètre quarré.

(*a*) Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, page 224.

(*b*) OEuvres de Buffon, partie expérimentale, 4e mémoire.

(*c*) *An essay on the strength and stress of timber*, page 221; ou Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, page 211.

37. D'après les expériences de MM. Séguin (*a*), la force d'un fil de 2 millimètres de diamètre est moyennement 190^k; ce qui revient à 60^k par millimètre quarré.

Résistance de l'acier à l'extension.

38. D'après les expériences du C^e Brown (*b*), sur des pièces de plus d'un pouce de grosseur, la force de cohésion sur un pouce quarré anglais, est, pour

l'acier *blistered*..... 14, 72 tonnes.
l'acier fondu..... 27, 92

Ces résultats reviennent à 27^k,9 et 44^k pour un millimètre quarré.

39. D'après les expériences de M. G. Rennie (*c*), la force de cohésion, pour des pièces quarrées de $\frac{1}{4}$ pouce anglais de côté, est, pour

l'acier fondu (*tilted*)..... 8391 liv. av. du poids.
l'acier (*blister*)..... 8322
l'acier (*shear*)..... 7977

Ces nombres, aussi-bien que ceux des n^{os} suivants, 41 et 42, doivent être multipliés par 0,01125, pour donner la résistance sur un millimètre quarré, exprimée en kilogrammes.

(*a*) Citées dans la Bibliothèque universelle.

(*b*) *An Essay on the strength*, etc., page 235. Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, page 222.

(*c*) *Philosophical transactions*, 1818. Annales de chimie et de physique, septembre, 1818.

Résistance du fer fondu à l'extension.

40. Résultats des expériences du Ce Brown (*a*), sur des barreaux quarrés.

Équarrissage des pièces.	Poids produisant la rupture.	
pouce anglais.	tonnes.	quint.
1 $\frac{1}{4}$	11	7
	11	5
	14	
	16	
1	11	10

Le résultat moyen revient à $14^k,2$ pour un millimètre quarré.

41. D'après les expériences de M. G. Rennie (*b*), la force de cohésion pour des pièces quarrées de $\frac{1}{4}$ pouce anglais de côté, est, pour

le fer fondu horizontalement... 1166 liv. av. du poids.
verticalement.. .. 1218

Résistance de divers métaux à l'extension.

42. D'après les mêmes expériences, la force de cohésion pour des pièces quarrées de $\frac{1}{4}$ pouce anglais de côté, est, pour le

Métal de canon dur..... 2273 liv. av. du poids.
Cuivre battu 2212
Cuivre fondu..... 1192
Cuivre jaune fin..... 1123
Étain fondu..... 296
Plomb fondu..... 114

(*a*) Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, pages 222, 224.

(*b*) *Philosophical transactions*, 1818. Annales de chimie et de physique, septembre, 1818.

Résistance des cordages à l'extension.

43. D'après les expériences de Duhamel, d étant le diamètre d'une corde, elle porte moyennement jusqu'à $400.d^2$ kilogrammes.

44. D'après Coulomb, les cordes blanches portent jusqu'à 50 ou $60^{\text{kil.}}$ par fil de carret, mais on ne doit jamais les charger de plus de $40^{\text{kil.}}$

45. Les cordes goudronnées ne portent que les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{3}{4}$ des cordes blanches (*a*).

ARTICLE III.

De la résistance d'un corps prismatique à la flexion produite par un effort dirigé perpendiculairement à la longueur de ce corps.

46. Quand un corps prismatique est tiré dans le sens de la longueur, tous les éléments longitudinaux, ou fibres, s'allongent. Si le même corps est comprimé, et qu'il ne puisse céder en pliant, les fibres s'accourcissent. Lorsque les allongements ou accourcissements sont très-petits, ils sont proportionnels à l'effort qui les produit. La variation de longueur d'un corps, pour un effort donné, est d'ailleurs évidemment proportionnelle à la longueur de ce corps.

47. Quand un corps prismatique est fléchi, les fibres situées du côté de la face convexe sont allongées; les

(*a*) Pour les expériences de Duhamel, voyez son Traité de l'art de la corderie, ou l'article *Cordages* du Dictionnaire de marine de l'Encyclopédie méthodique. Pour les assertions de Coulomb, voyez le tome X des Mémoires des savants étrangers, page 285.

fibres situées du côté de la face concave sont accourcies; certaines fibres, situées dans l'intérieur du corps, conservent une longueur invariable. En admettant, conformément à ce qui a été dit ci-dessus, que les fibres opposent à l'allongement et à l'accourcissement, des résistances proportionnelles aux quantités dont les longueurs de ces fibres varient, on peut se rendre compte de la manière dont un corps résiste à la flexion.

Soit un solide prismatique droit (Fig. 1), encastré horizontalement à l'extrémité A, et fléchi par l'action d'un poids P suspendu à l'autre extrémité B. Considérons une section transversale quelconque *m a n a'*. Soit *a a'* la ligne horizontale qui est la section des fibres dont la longueur n'a pas varié. Il est nécessaire, pour l'équilibre de la partie du corps située à droite de *mana'*: 1° que les extensions et compressions des fibres aient fait naître, dans cette section, des forces verticales dont la somme égale le poids P; 2° que la somme des forces horizontales produites par ces extensions et compressions soit nulle; 3° que la somme des moments des forces verticales et horizontales dont il s'agit, et du poids P, pris par rapport à l'axe fixe *a a'*, soit nulle.

On nommera

E la force nécessaire pour allonger ou pour accourcir un prisme dont la section transversale est l'unité superficielle, d'une quantité égale à la longueur de ce prisme.

ρ le rayon du cercle osculateur de la courbe du solide, au point où est faite la section transversale *mana'*.

u l'abscisse d'un point quelconque de la section *ama'n*, comptée sur *aa'*.

v l'ordonnée d'un point quelconque de cette section, prise perpendiculairement à *a a'*.

a la plus grande valeur de u.

$f_1 u$ l'ordonnée pm de la courbe qui termine la partie de la section transversale où les fibres s'allongent.

$f_2 u$ l'ordonnée pn de la courbe qui termine la partie où les fibres s'accourcissent.

x la distance de la section transversale $amma'n$ à l'extrémité encastrée.

c la distance du point d'application du poids P à l'extrémité encastrée, qui ne diffère pas sensiblement de la longueur AB du solide.

Dans l'état naturel du corps, dx est la longueur de la portion infiniment petite de la fibre dont les coordonnées sont u, v. Après la flexion, cette longueur a augmenté de $\frac{dx}{\rho}v$, parce que l'angle de deux normales consécutives est $\frac{dx}{\rho}$. La proportion suivant laquelle cette fibre s'est allongée est donc

$$\frac{\frac{dx}{\rho}v}{dx}, \text{ ou } \frac{v}{\rho}.$$

L'aire de la section transversale de la fibre étant $dudv$, la résistance qu'elle oppose à l'allongement est

$$\mathrm{E}.dudv.\frac{v}{\rho};$$

et le moment de cette résistance, pris par rapport à l'axe aa', est

$$\mathrm{E}.dudv.\frac{v^2}{\rho}.$$

Par conséquent les sommes des résistances des fibres

étendues et des fibres comprimées sont respectivement

$$\frac{E}{\rho}\int_0^a du\int_0^{f_1 u} dv.v,\ \rho\int_0^a du\int_0^{f_2 u} dv.v.$$

La somme des moments de ces résistances, pris par rapport à l'axe aa', est

$$\frac{E}{\rho}\left(\int_0^a du\int_0^{f_1 u} dv.v^2+\int_0^a du\int_0^{f_2 u} dv.v^2\right).$$

48. On aura donc, pour exprimer l'équilibre des forces horizontales, condition qui détermine la situation de l'axe aa',

$$\int_0^a du\int_0^{f_1 u} dv.v=\int_0^a du\int_0^{f_2 u} dv.v.$$

49. On aura ensuite, pour exprimer l'équilibre de rotation autour de cet axe,

$$\frac{E}{\rho}\left(\int_0^a du\int_0^{f_1 u} dv.v^2+\int_0^a du\int_0^{f_2 u} dv.v^2\right)=P(c-x).$$

On néglige les moments des forces verticales, ce qui est permis quand l'épaisseur du corps est petite par rapport à la longueur.

50. La quantité

$$E\left(\int_0^a du\int_0^{f_1 u} dv.v^2+\int_0^a du\int_0^{f_2 u} dv.v^2\right)$$

a, pour chaque corps, une valeur qui dépend de la

nature de ce corps et de la figure de la section transversale. Nous nommerons cette quantité *moment d'élasticité* du corps. Quand la figure de la section transversale du solide est susceptible d'être partagée par une ligne horizontale en deux parties symétriques, cette ligne est l'axe d'équilibre qui contient les fibres invariables, et à partir de laquelle il faut prendre la valeur de l'intégrale

$$E\int_0^a du\int_0^{f,u} dv.v^2,$$

dont le double est alors la valeur du moment d'élasticité. Dans le cas contraire, il faut déterminer d'abord la position de l'axe d'équilibre, au moyen de la condition exprimée n° 48, et calculer ensuite séparément les valeurs des deux intégrales qui entrent dans l'expression de ce moment d'élasticité.

51. Si la figure de la section est un rectangle (Fig. 2), dont a et b soient la largeur et la hauteur, la valeur du moment d'élasticité est

$$2E\int_0^a du\int_0^{\frac{1}{2}b} dv.v^2 = E\frac{ab^3}{12}.$$

Ainsi la résistance à la flexion est proportionnelle à la largeur et au cube de la hauteur du solide.

52. Si cette figure (Fig. 3) est formée de deux triangles égaux, dont les côtés soient p et q, la valeur du moment d'élasticité est

$$2E\int_0^p du\int_0^{\frac{qu}{p}} dv.v^2 = E\frac{pq^3}{6}.$$

En déduisant de cette expression la valeur du moment d'élasticité d'un prisme à base quarrée, fléchi dans le sens des diagonales de la base, on trouve que ce moment a la même valeur que dans le cas où le prisme est fléchi dans le sens des côtés de cette base.

53. Lorsque la figure de la section transversale (Fig. 4) est un cercle dont r est le rayon, l'expression générale du moment d'élasticité devient

$$2\mathrm{E}\int_{-r}^{r} du \int_{0}^{\sqrt{r^2-u^2}} dv.v^2 = 2\mathrm{E}\int_{-r}^{r} du.\frac{1}{3}(r^2-u^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2\mathrm{E}.2\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} dx.\frac{r^4}{3}\sin.^4 x$$

dont la valeur est $\mathrm{E}\frac{\pi r^4}{4}$.

On conclut de là que les résistances à la flexion du quarré et du cercle qui lui est inscrit, sont entre elles dans le rapport de 1 à $\frac{3\pi}{16}$.

54. Le moment d'élasticité d'un tuyau est la différence des moments d'élasticité de deux cylindres. r', r'' étant les rayons extérieurs et intérieurs du tuyau, le moment d'élasticité sera

$$\mathrm{E}\frac{\pi(r'^4-r''^4)}{4}.$$

55. Considérons, comme dans le n° 47, un solide prismatique droit (Fig. 5), encastré horizontalement à une extrémité A, et chargé à l'autre extrémité M d'un poids.

Nommons

x l'abscisse Ap d'un point m de la courbe du solide, comptée sur l'horizontale AB.

y l'ordonnée pm.

ρ le rayon du cercle osculateur de la courbe du solide en m.

P le poids placé à l'extrémité M du solide.

c la distance horizontale A B des deux extrémités du solide.

f l'ordonnée B M de l'extrémité de la courbe.

s la longeur A m M du solide.

α l'angle formé avec l'horizon par la tangente de la courbe du solide à l'extrémité M.

ε la valeur du moment d'élasticité du solide, dont l'expression générale est donnée n° 50.

L'équation d'équilibre du n° 49 est

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = P(c - x),$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = P(c - x);$$

et dans le cas où la flexion est très-petite, ce qui permet de négliger le quarré de $\frac{dy}{dx}$, on a

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(c - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P\left(cx - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y = P\left(\frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right),$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{c^3}{3},$$

$$s = c + \frac{3f^2}{5c},$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{3f}{2c}.$$

56. Quand le solide est posé horizontalement sur deux appuis (Fig. 6), les équations précédentes conviennent à la courbe formée par chacune des moitiés. Nommant

f la flèche AC de la courbe du solide.
$2P$ le poids suspendu au milieu du solide.
$2c$ la distance MM′ des appuis.
$2s$ la longueur MAM′ du solide entre les appuis.
α l'inclinaison de la courbe à l'extrémité M.

On a, en supposant la courbure du solide très-petite,

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{c^3}{3},$$

$$f = \frac{2P}{\varepsilon} \cdot \frac{(2c)^3}{48},$$

$$s = c + \frac{3f^2}{5c},$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{3f}{2c}.$$

La flèche de la courbe est proportionnelle au poids $2P$, et au cube de la distance des appuis.

57. En considérant toujours, comme dans le n° 55, un solide prismatique droit (Fig. 7), encastré horizontalement à une extrémité, on peut le supposer chargé, dans tous les points de la longueur, de poids distribués d'une manière quelconque. Nommant

x, y les coordonnées horizontale et verticale d'un point quelconque m de la courbe du solide.
x' l'abscisse d'un point quelconque m' situé entre m et l'extrémité M.
c la distance AB.
p' la valeur du poids suspendu en m', rapportée à l'unité de longueur de l'abscisse, en sorte que $p'dx'$

est le poids supporté par l'élément dont la projection est dx'. (La quantité p' est censée donnée en fonction de x'.)

f l'ordonnée BM de l'extrémité de la courbe.

On aura

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=\int_x^c dx'.p'(x'-x),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=\int_0^x dx\int_x^c dx'.p'(x'-x),$$

$$\varepsilon y=\int_0^x dx\int_0^x dx\int_x^c dx'.p'(x'-x).$$

58. Si les poids portés par chacun des éléments de la longueur du solide sont égaux, ce qui comprend le cas où ces poids seraient ceux mêmes des éléments, p' aura une valeur constante p, et l'on aura

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=p\left(\frac{c^2}{2}-cx+\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=p\left(\frac{c^2x}{2}-\frac{cx^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right),$$

$$\varepsilon y=p\left(\frac{c^2x^2}{4}-\frac{cx^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right),$$

$$f=\frac{p}{\varepsilon}.\frac{c^4}{8},$$

$$\text{tang.}\,\alpha=\frac{4f}{3c}.$$

pc est le poids total réparti sur la longueur du solide. D'après le n° 55, si ce poids était appliqué en M, l'abaissement de ce point serait plus grand, dans le rapport de 8 à 3.

59. Lorsqu'un solide posé horizontalement sur deux appuis (Fig. 8), est chargé par des poids distribués uniformément sur la longueur, chaque moitié est dans le même cas que si, étant encastrée horizontalement à une extrémité, elle était fléchie à la fois par des poids distribués uniformément sur la longueur, et par une force égale à la somme de ces poids, et agissant en sens contraire à l'autre extrémité. On a donc

$$\varepsilon y = pc\left(\frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - p\left(\frac{c^2x^2}{4} - \frac{cx^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right),$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{5c^4}{24},$$

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{8f}{5c}.$$

D'après le n° 56, si le poids $2pc$ était suspendu au milieu du solide, au lieu d'être réparti uniformément sur toute la longueur, la flèche serait plus grande dans le rapport de 8 à 5. Ces résultats sont confirmés par l'expérience.

60. Pour appliquer les résultats précédents à un corps donné, il faudra substituer à la place de ε l'expression du moment d'élasticité qui convient à la figure de la section transversale de ce corps, conformément aux nos 50 et suivants. On attribuera ensuite à la constante E (n° 47) la valeur qui convient à la nature du corps, et qui doit être déterminée par l'observation.

Les expériences les plus propres à déterminer cette valeur consistent à placer horizontalement un solide prismatique sur deux appuis, à le charger au milieu d'un poids, et à observer la flèche de la courbure produite par ce poids. Si la section transversale du

solide est un rectangle (Fig. 2) dont les côtés soient a et b, on a (n° 51), $\varepsilon = E\frac{ab^3}{12}$, et (n° 56) $f = \frac{2P}{\varepsilon}\cdot\frac{(2c)^3}{48}$: donc

$$f = \frac{2P}{E}\cdot\frac{(2c)^3}{4.ab^3},\quad E = 2P\cdot\frac{(2c)^3}{4.ab^3.f};$$

$2c$ étant l'intervalle des appuis, et $2P$ le poids placé au milieu de la longueur du solide.

61. On doit quelquefois tenir compte de l'action du poids du solide. On y parviendra, d'après le n° 59, en ajoutant à $2P$ les $\frac{5}{8}$ de ce poids. Ainsi, en le désignant par 2Π, on a

$$f = \frac{2P + \frac{5}{8}(2\Pi)}{E}\cdot\frac{(2c)^3}{4.ab^3},\quad E = \left(2P + \frac{5.2\Pi}{8}\right)\frac{(2c)^3}{4.ab^3.f}.$$

62. On remarquera enfin qu'il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs absolues du poids placé au milieu du solide et de la flèche de courbure correspondante, mais seulement l'accroissement de la flèche de courbure correspondant à un accroissement donné de ce poids. En effet, nommant P', P'' deux valeurs successives de P, et f', f'' les deux valeurs correspondantes de f, l'une ou l'autre des équations précédentes donne

$$E = (2P'' - 2P')\frac{(2c)^3}{4.ab^3(f'' - f')}.$$

Nous allons maintenant exposer les résultats des expériences connues, d'après lesquelles on peut déterminer les valeurs de la constante E qui conviennent à divers corps. Ces valeurs ne peuvent être connues exactement qu'au moyen d'expériences dans lesquelles la flexion est fort petite. Quand l'extension ou la compression des fibres approchent du terme où la rupture

doit avoir lieu, la résistance de ces fibres cesse ordinairement d'être exactement proportionnelle à l'extension ou à la compression, comme on l'a supposé nos 46 et 47; ce que l'on exprime en disant que l'élasticité est altérée.

Résistance du bois à la flexion.

63. Résultats des expériences faites par Duhamel (*a*), sur des pièces de chêne posées horizontalement sur deux appuis, et chargées au milieu de la longueur. La distance des appuis est 23 pieds, et le poids placé au milieu de la longueur 7591 livres.

Largeur des pièces.	Hauteur des pièces.	Flèche de la courbure.
pouces.	pouces.	pouces.
10	9	$3\frac{1}{2}$
10	$11\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
12	13	1

On conclut de ces expériences, au moyen de la formule du n° 61, que la valeur moyenne de la constante E, pour le bois de chêne, est

$$E = 1\,012\,000\,000^{k},$$

le mètre étant l'unité de longueur, et le kilogramme l'unité de poids.

Il en résulte qu'une pièce de chêne supportant une tension longitudinale de $1^{kil.}$ sur chaque millimètre quarré de la section transversale, s'allonge de $\frac{1}{1012}$.

(*a*) Mémoires de l'Académie des sciences, 1768.

64. Résultats moyens des expériences faites par M. Aubry (*a*), sur des pièces de bois de chêne posées horizontalement sur deux appuis, et chargées au milieu. On n'a point inséré ici le détail des charges et des flèches de courbures correspondantes, observées par l'auteur ; mais seulement les nombres moyens, propres à indiquer les rapports des charges aux flèches, qui résultent de ces observations.

Intervalle des appuis.	Largeur des pièces.	Hauteur des pièces.	Charge au milieu.	Flèche de courbure.
pieds.	pouces.	pouces.	livres.	lignes.
12	3	3	169	12
5	1	2,5	35	1

65. Résultats moyens des expériences faites à Corcyre, en 1811, par M. Ch. Dupin (*b*), sur diverses espèces de bois. L'intervalle des appuis était de 2^m.

Bois soumis a l'expérience.	Largeur des pièces.	Hauteur des pièces.	Charge au milieu.	Flèche de courbure.
	mètre.	mètre.	kilogr.	mètre.
Chêne de démolition, 25 ans de coupe.	0,03	0,03	4	0,00585
Cyprès, un an de coupe.....	0,03	0,03	4	0,0072
Hêtre, un an de coupe.....	0,03	0,03	4	0,0089
Sapin de démolition, 25 ans de coupe.	0,03	0,02	2	0,016
	0,02	0,03	2	0,0072
	0,02	0,01	0,5	0,047
	0,01	0,02	0,5	0,0112
	0,03	0,01	1	0,0801
	0,01	0,03	1	0,007
	0,05	0,02	10	0,0305
	0,02	0,05	10	0,005

(*a*) Mémoires sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques, pages 55 et 66.

(*b*) Journal de l'École Polytechnique, 17e cahier.

La première expérience, sur le bois de chêne, donne pour la valeur de la constante E,

$$E = 1\,688\,000\,000^k.$$

Les expériences sur le bois de sapin donnent moyennement pour la valeur de la même constante

$$E = 1\,029\,000\,000^k.$$

66. Résultats moyens des expériences faites sur des pièces de bois de chêne et de sapin, par M. Rondelet (*a*). Les pièces avaient un pouce d'équarrissage.

Bois soumis à l'expérience.	Intervalle des appuis.	Charge au milieu.	Flèche de courbure.
	pouces.	livres.	lignes.
Chêne.....	42	100	11,5
Sapin.....	42	100	11

On déduit de ces expériences, que la valeur de la constante E, pour le chêne et pour le sapin, est environ

$$E = 1\,300\,000\,000^k.$$

67. Résultats moyens des expériences de M. Barlow, sur l'élasticité de diverses espèces de bois (*b*).

Toutes les pièces ont 2 pouces anglais d'équarrissage.

INDICATION DES BOIS.	Pesanteur spécifique.	Dist. des appuis.	Charge au milieu.	Flèche de courbure.	Nombres proportionnels à l'élasticité.
		pieds.	livres av. du poids.	pouces.	
Teak.....	0,745	7	300	1,151	9658
Poon.....	0,579	7	150	0,822	6760
Chêne anglais.....	0,969	7	150	1,590	3495
Idem.....	0,934	7	200	1,280	5806

(*a*) Art de bâtir, tome IV, page 514.

(*b*) *An essay on the strength and stress of timber*, page 180.

Chêne du Canada.....	0,872	7	225	1,080	8596
Chêne de Dantzick.....	0,756	7	200	1,590	4766
Chêne de l'Adriatique.....	0,993	7	150	1,430	3886
Frêne.....	0,760	7	225	1,206	6581
Hêtre.....	0,696	7	150	1,026	5417
Orme.....	0,553	7	125	1,685	2799
Epicea (*Pitch pine*).....	0,660	7	150	1,134	4900
Pin rouge.....	0,657	7	150	0,755	7360
Sapin de la Nouvelle-Angleterre.....	0,553	7	150	0,931	5967
Sapin de Riga.....	0,753	7	125	0,870	5315
Idem.....	0,738	6	150	0,883	3963
Sapin de *Mar forest*.....	0,696	7	125	1,442	2581
Idem.....	0,693	6	150	1,006	3478
Idem.....	0,703	6	150	1,006	3478
Larix.....	0,531	7	125	1,885	2465
Idem.....	0,522	6	125	0,812	3591
Idem.....	0,556	6	150	0,831	4211
Idem.....	0,560	6	150	0,831	4211
Espares de Norwége (en sapin).....	0,577	6	200	0,800	5832

Le premier échantillon de chêne anglais était d'une qualité inférieure.

Les nombres de la dernière colonne, multipliés par 175700, donneront les valeurs de la constante E, le mètre étant l'unité de longueur et le kilogramme l'unité de poids. Ainsi, pour le bois de chêne, la plus grande valeur de cette quantité, donnée par l'expérience sur le chêne du Canada, est

$$E = 1\,510\,000\,000^k;$$

et la plus petite valeur, donnée par l'expérience sur le chêne de l'Adriatique, est

$$E = 683\,000\,000^k;$$

Pour le sapin, la plus grande valeur, donnée par l'expérience sur le pin rouge, est

$$E = 1\,293\,000\,000^k;$$

et la plus petite valeur, conclue du résultat moyen des expériences sur le sapin de la forêt de Mar, en Écosse, est

$$E = 558\,500\,000^k.$$

M. Barlow donne ailleurs (*a*) une suite d'expériences sur des verges de sapin. Le résultat moyen répond à la valeur

$$E = 934\,000\,000^k.$$

68. Résultats moyens des expériences sur la flexion du bois de chêne, faites en Angleterre, par MM. Ebbels et Tredgold (*b*). Les pièces étaient posées horizontalement sur deux appuis, et chargées au milieu. Toutes avaient un pouce d'équarrissage.

ESPÈCE DE CHÊNE.	PESANTEUR spécifique.	INTERVALLE des appuis.	POIDS produisant l'inflexion.	FLÈCHE de courbure.
		pieds anglais.	livres av. du poids.	pouces anglais.
Vieux bois de vaisseau.....	0,872	2,5	127	0,5
Jeune chêne, King's Langley, Herts.....	0,863	2	237	0,5
Chêne de Beaulieu, Hants...	0,616	2,5	78	0,5
Idem, autre pièce.....	0,736	2,5	65	0,5
Chêne d'un vieil arbre.....	0,625	2	103	0,5
Chêne de Riga.....	0,688	2	233	0,5
Chêne anglais.....	0,748	2,5	137	0,5
Chêne vert, anglais.....	0,763	2,5	96	0,5
Chêne de Dantzick, desséché.	0,755	2,5	148	0,5
Chêne (*quercus sesiliflora*)..		2	149	0,35
Chêne (*quercus robur*).....		2	167	0,35

(*a*) *An essay on the strength and stress of timber*, page 125.

(*b*) *Elementary principles of carpentry*, page 34.

69. Résultats moyens des expériences faites sur la flexion du sapin, par les mêmes auteurs (*a*).

ESPÈCE DE SAPIN.	Pesanteur spécifique.	Intervalle des appuis.	Largeur des pièces.	Hauteur des pièces.	Poids produisant l'inflexion.	Flèche de courbure.
		pieds angl.	po. ang.	po. angl.	livres angl.	pouces.
Sapin jaune de Riga		18	2	7	103	0,25
Sapin jaune de Long Sound, Norwège.....	0,640	2	1	1	261	0,5
Sapin jaune de Riga	0,480	2,5	1	1	123	0,5
Idem.....	0,464	2,5	1	1	116	0,5
Sapin jaune de Memel.....	0,553	2,5	1	1	143	0,5
Idem.....	0,544	2,5	1	1	145	0,5
Pin d'Amérique, présnmé le pin de Weymouth..	0,460	2	1	1	237	0,5
Idem	0,407	3	1	1	69	0,5
Sapin blanc de Christiania....	0,512	2	1	1	261	0,5
Sapin blanc de Quebec..... ...	0,465	2	1	1	180	0,5
Larix, Blair, en Écosse.....	0,622	2,5	1	1	93	0,5
Idem, desséché...	0,644	2,5	1	1	101	0,5
Idem.....	0,554	2,5	1	1	112	0,5
Idem, bois très-jenne.....	0,396	2,5	1	1	45	0,5
Sapin d'Écosse ...	0,529	2,5	1	1		
Sapin blanc d'Angleterre.....	0,555	2,5	1	1	89 103	0,5 0,5

Résistance du fer forgé à la flexion.

70. Le tableau suivant est formé d'après les expériences faites en 1812, à Bordeaux, par M. Duleau (*b*), sur des pièces de fer forgé posées horizontalement

(*a*) *Elementary principles of carpentry*, page 34.

(*b*) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, page 26.

sur deux appuis, et chargées au milieu. Les résultats sont ramenés par le calcul à présenter la flèche de la courbure affectée par chaque pièce, sous une charge de 10 kil. placée au milieu.

PIÈCES SOUMISES A L'EXPÉRIENCE.	INTERVALLE des appuis.	LARGEUR des pièces.	HAUTEUR des pièces.	FLÈCHE de courbure.
	mètres.	millimètr.	millimètres.	millimètres.
Fer du Périgord. La section transversale est un triangle équilatéral, de 0m,038 de côté	3			7,6
(La flèche est la même en posant la pièce sur une face ou une arête.)				
Fer du Périgord	1	61	5,5	12,57
Même pièce	0,5	61	5,5	1,71
Fer d'Angleterre, tel qu'il sort des grosses forges	3,035	34	8,56	136
Même pièce	3,075	8 56	34	13,5
Fer du Périgord	2	30	11	24
Même pièce	1	30	11	3
Fer du Périgord, doux (destiné pour des fers de chevaux)	2	70	11,2	9,5
Fer du Périgord	1	68	11	1,5
Idem (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	2	45	12	12
Fer du Périgord	2	40	11,5	21
Même pièce	1	40	11,5	2,5
Même pièce	2	11,5	40	1,67
Fer du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	3	77	14	14,4
Fer d'Angleterre, marqué B (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	1,5	67,8	14,7	2
Fer du Périgord	3	25	15	37
Même pièce	3	15	25	14
Fer du Périgord	1	58	16,3	0,57
Idem	3	39	19,6	10,8
Même pièce	3	19,6	39	2,8
Fer du Périgord	2	60	20	2
Idem	3	60	20	6,6
Même pièce	3	20	60	0,75
Fer du Périgord	5	120	20	15
Fer des Landes	2	120	21	1
Fer du Périgord	3	39	24,5	6

Même pièce	3	24,5	39	2,33
Fer du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	3	67	26	2,3
Fer du Périgord	5	108	30	4,75
Même pièce	5	30	108	0,4
Fer du Périgord	2,92	31	31	3
La même pièce, posée sur une arête				3,35
		Diamètre en millimètres.		
Fer rond, de l'Arriège, tel qu'il sort des grosses forges	3,69	21,49		48,25
Idem	2,99	21,51		27,5
Fer rond anglais, *idem*	2,935	23,52		18
Fer rond de l'Arriège, *idem*	2,92	26,82		10
Fer rond de Bilbao, très-doux	2,92	31,8		5

Le résultat général de ces expériences (*a*) est que la valeur moyenne de la constante E (voyez le n° 47), qui convient au fer forgé, est, en prenant le mètre pour unité de longueur et le kilogramme pour unité de poids, $E = 20\,000\,000\,000^{k}$.

En calculant d'après cette donnée les flèches de courbure, par la formule du n° 61, les plus grandes différences entre le calcul et l'expérience ne dépassent pas $\frac{1}{4}$, en plus ou en moins.

On conclut de ce résultat qu'une pièce de fer forgé supportant une tension d'un kilogramme sur chaque millimètre quarré de la section transversale, s'allonge de $\frac{1}{20000}$.

Résistance de l'acier à la flexion.

71. Résultats moyens des expériences faites par M. Duleau, sur des pièces d'acier posées horizontalement sur deux appuis, et chargées au milieu. Les flèches de

(*a*) Essai théorique et expérimental, page 54.

courbure répondent, comme ci-dessus, à une charge de 10kil.

PIÈCES SOUMISES A L'EXPÉRIENCE.	INTERVALLE des appuis.	LARGEUR des pièces.	HAUTEUR des pièces.	FLÈCHE de courbure.
	mètres.	millimètres.	millimètres.	millimètres.
Acier fondu d'Angleterre, marqué Huntsman.....	0,98	13,3	5,9	32,05
Même pièce.....	0,98	5,9	13,3	8,4
Acier de cémentation, d'Allemagne, marqué Fortsman, pour des rasoirs.....	0,68	14,5	7,8	8
Même pièce.....	0,68	7,8	14,5	2,1
Acier de même espèce.....	1,845	25,7	21,6	2,8
Même pièce.....	1,845	21,6	25,7	2,2
Acier de même espèce.....	1,845	28,5	21,9	2,6
Même pièce.....	1,845	21,9	28,5	1,8
Acier de même espèce.....	1,35	54,8	25,5	0,55
Même pièce.....	1,35	25,5	54,8	0,27
Acier de même espèce.....	1,35	52	26,6	0,5
Même pièce.....	1,35	26,6	52	0,3

D'après ces expériences, la résistance de l'acier est moindre que celle du fer, et les résultats présentent moins de régularité.

Résistance du fer fondu à la flexion.

72. Résultats moyens des expériences faites par M. Rondelet, sur des barres de fer fondu posées horizontalement sur deux appuis, et chargées au milieu (*a*). Toutes ces barres ont un pouce d'équarrissage.

PIECES SOUMISES A L'EXPÉRIENCE.	INTERVALLE des appuis.	CHARGE au milieu.	FLÈCHE de courbure.
	pouces.	livres.	lignes.
Fonte grise.....	42	312	5,5
Fonte douce.....	42	312	4,6
Fonte grise.....	21	450	1
Fonte douce.....	21	450	0,875

(*a*) Art de bâtir, tome IV, page 514.

La valeur moyenne de la constante E, donnée par les expériences sur la fonte grise, est

$$E = 9\,029\,000\,000^k;$$

et celle donnée par les expériences sur la fonte douce, est

$$E = 10\,653\,000\,000^k.$$

73. Résultats moyens des expériences faites par M. Tredgold, sur des barreaux de fer fondu posés horizontalement sur deux appuis, et chargés au milieu (*a*).

PIÈCES soumises A L'EXPÉRIENCE.	INTERVALLE des appuis.	LARGEUR des pièces.	HAUTEUR des pièces.	CHARGE au milieu.	FLÈCHE de courbure.
	pouces.	pouces.	pouces.	livres.	pouces.
Fonte grise douce, cédant aisément à la lime, ou peu au marteau.....	34	1	1	20	0,01
Fondue par M. Dowson.	77	1,5	3	440	0,075
Même pièce.....	77	3	1,5	360	0,25
Fondue par M. Bramah (fonte moins douce que la précédente).....	36	0,9	0,9	180	0,183
Idem.....	36	0,9	0,9	180	0,189
Idem.....	36	0,75	0,975	180	0,255

La règle adoptée par l'auteur, comme résultat moyen des expériences (*b*), revient à attribuer à la constante E la valeur $E = 12\,144\,000\,000^k$.

(*a*) *A practical essay on the strength of cast iron*, page 45.

(*b*) *Idem*, page 40. Les nombres représentés par *a* par l'auteur sont réciproques à la résistance à la flexion. On doit diviser le nombre 12144000 par le nombre *a*, pour avoir la valeur correspondante de E, le mètre et le kilogramme étant pris pour unités de longueur et de poids.

ARTICLE IV.

De la résistance d'un solide prismatique à la rupture produite par un effort dirigé perpendiculairement à la longueur de ce solide.

74. Les fibres des corps, quand on les soumet à des extensions ou à des accourcissements très-petits, s'étendent ou s'accourcissent de la même quantité sous un même poids, comme on l'a dit nos 46 et 47. Alors, si la section transversale est rectangulaire, les fibres dont la longueur ne varie pas, lors de la flexion du corps, sont au milieu de la hauteur de cette section. Quand les variations de longueur des fibres sont plus considérables, ces fibres peuvent, sous le même effort, s'étendre plus ou moins qu'elles ne s'accourcissent. Alors les fibres invariables s'éloignent ou s'approchent de la face qui devient convexe lors de la flexion. La rupture a lieu quand les fibres étendues ne peuvent plus l'être davantage sans se séparer, ou quand les fibres comprimées ne peuvent plus l'être davantage sans s'écraser. La rupture se manifeste d'une manière différente selon les corps. Dans les pierres, le verre, les métaux fondus, il se fait une séparation brusque et totale sur toute la hauteur de la section. Dans les bois, les fibres sont écrasées vers la face concave, et arrachées irrégulièrement vers la face convexe. Dans les métaux forgés, la rupture n'est pas toujours accompagnée d'une séparation totale ou partielle. Les molécules, sans cesser d'être adhérentes, paraissent avoir pris, près de la section de rupture, de nouvelles positions d'équilibre, en vertu desquelles la figure du solide a changé.

Les conditions de la rupture dépendent de l'équilibre qui s'établit entre les forces qui tendent à rompre le corps, et les résistances dues aux forces développées, par l'effet des extensions et compressions des fibres, dans la section transversale où la rupture va s'opérer. Pour évaluer exactement ces résistances, il faudrait connaître 1° l'axe d'équilibre où sont placées les fibres invariables ; 2° la valeur de la force produite dans une fibre par une extension ou une compression données. A défaut de ces connaissances, que l'on ne pourrait acquérir que par des expériences délicates, on est obligé, pour obtenir au moins des évaluations approximatives, de recourir à des hypothèses.

75. L'hypothèse la plus simple, et généralement la moins éloignée de la vérité, consiste à admettre que les résistances des fibres, à l'instant où la rupture va s'opérer, sont encore proportionnelles aux extensions ou compressions de ces fibres, comme elles le sont dans le cas d'une flexion très-petite. Alors l'état de la section transversale du corps, à l'instant où la rupture va s'opérer, ne diffère point de l'état considéré dans les n°s 47 et suivants. Seulement il faut concevoir que la fibre placée à la face convexe qui est le plus étendue, ou la fibre placée à la face concave qui est le plus accourcie, éprouvent le degré d'allongement ou d'accourcissement qui est immédiatement suivi de la rupture.

La situation de l'axe d'équilibre, où sont placées les fibres invariables, se déterminera toujours par la même condition géométrique énoncée n° 48. Supposons cet axe ainsi déterminé, conservons les dénominations du n° 47, qui se rapportent à la Fig. 1 ; appelons de plus :

v' la distance à l'axe d'équilibre aa' de la fibre ex-

trême située à la face convexe ou à la face concave du solide, qui est prête à rompre;

R une constante exprimant la force nécessaire pour rompre un prisme dont la section transversale est l'unité superficielle, tiré dans le sens de la longueur.

En remarquant que la résistance des fibres situées à la distance v' de l'axe aa' est $du\,dv.\mathrm{R}$, et que la résistance des fibres situées à la distance v du même axe est $du\,dv.\frac{\mathrm{R}v}{v'}$, on aura pour l'expression de la somme des moments de ces résistances, pris par rapport à l'axe aa',

$$\frac{\mathrm{R}}{v'}\left(\int_0^a du\int_0^{f_1 u} dv.v^2+\int_0^a du\int_0^{f_2 u} dv.v^2\right).$$

Nous nommerons cette expression *moment de rupture* du corps.

76. Si la section transversale peut être partagée en deux parties symétriques, par une ligne perpendiculaire à la direction de la force qui agit sur le corps, l'axe d'équilibre est placé dans cette ligne. Les deux intégrales sont égales, et l'on a

$$\frac{2\mathrm{R}}{v'}\int_0^a du\int_0^{f_1 u} dv.v^2$$

pour l'expression du moment de rupture.

En comparant ces formules à celles trouvées n° 50 pour représenter le moment d'élasticité, on reconnaît que l'expression du moment de rupture peut être déduite de celle du moment d'élasticité en écrivant R à la place de E, et en divisant par v', c'est-à-dire par la

distance à l'axe d'équilibre contenant les fibres invariables, de la fibre qui en est le plus éloignée. D'après cela, les expressions des n°s 51 et suivants donneront immédiatement les résultats énoncés ci-après.

77. La section étant un rectangle (Fig. 2) dont a et b sont la largeur et l'épaisseur, $v' = \frac{b}{2}$, et l'expression du moment de rupture est

$$\frac{2\,\mathrm{R}}{b} \cdot \frac{a\,b^3}{12} = \mathrm{R}\frac{a\,b^2}{6}.$$

78. La figure de la section étant formée de deux triangles égaux (Fig. 3), dont les côtés sont p et q, le moment de la résistance à la rupture est

$$\frac{\mathrm{R}}{q} \cdot \frac{p\,q^3}{6} = \mathrm{R}\frac{p\,q^2}{6}.$$

On déduit de ce résultat, pour le moment de la résistance à la rupture d'un prisme à base quarrée, fléchi dans le sens des diagonales, $\mathrm{R}\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$; expression moindre dans le rapport de 1 à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, que celle trouvée dans le numéro précédent.

79. La figure de la section transversale étant un cercle (Fig. 4) dont r est le rayon, l'expression du moment de la résistance à la rupture est

$$\frac{\mathrm{R}}{r} \cdot \frac{\pi r^4}{4} = \mathrm{R}\frac{\pi r^3}{4}.$$

Les moments de rupture, pour le quarré et le cercle inscrit, sont entre eux dans le rapport de 1 à $\frac{3\pi}{16}$, le même qui a lieu pour le cas de la flexion.

80. A l'égard d'un tuyau, r' et r'' étant les rayons des cylindres extérieurs et intérieurs, remarquant que le moment de rupture du vide intérieur supposé plein, est

$$\frac{R}{r'} \cdot \frac{\pi r''^4}{4},$$

on a pour le moment cherché

$$R \frac{\pi(r'^4 - r''^4)}{4r'}.$$

A sections transversales égales, un cylindre plein et un tuyau offrent des résistances à la rupture qui sont entre elles dans le rapport de

$$(r'^2 - r''^2)^{\frac{3}{2}} \text{ à } \frac{r'^4 - r''^4}{r'}.$$

A résistances égales, les sections transversales du cylindre et du tuyau sont entre elles dans le rapport de

$$\left(\frac{r'^4 - r''^4}{r'}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ à } r'^2 - r''^2.$$

81. Connaissant l'expression du moment de rupture pour une base de fracture rectangulaire, on peut se proposer d'inscrire dans un cercle un rectangle déterminé par la condition de rendre cette expression un maximum. Le diamètre du cercle étant 1, les côtés de ce rectangle seront respectivement $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

82. Considérons un solide prismatique (Fig. 9) encastré horizontalement à l'extrémité A, et chargé à l'autre extrémité M d'un poids. Nommons

ρ le moment de rupture, évalué conformément aux

nos 75 et suivants, d'après la figure de la section transversale du solide;

P le poids suspendu à l'extrémité M du corps;

c la distance horizontale de la section A à la direction du poids P;

s la longueur AM du solide;

f la flèche de courbure CM.

La rupture tend à se faire dans la section A, et les conditions de l'équilibre sont exprimées par

$$\rho = Pc, \text{ d'où } P = \frac{\rho}{c};$$

ou à peu près, en supposant que la courbure du solide est l'élastique du no 55, ce qui donne $s = c + \frac{3f^2}{5c}$,

$$P = \frac{\rho}{s - \frac{3f^2}{5c}}.$$

83. Considérons présentement un solide prismatique (Fig. 10), posé horizontalement sur deux appuis, et chargé au milieu. Nommons

2P le poids suspendu au milieu A du solide;

c la moitié CM de la distance des appuis;

f la flèche de courbure AC;

α l'angle de la tangente à la courbe en M, M' avec l'horizontale MM'.

La rupture du corps tend à s'effectuer au milieu A. L'effort exercé contre l'appui M (abstraction faite de la considération du frottement sur cet appui) est une force normale à la courbe du solide, dont la composante verticale est P, et la composante horizontale P tang. α. Par conséquent, en supposant que la courbe

Digitized by Google

du solide est l'élastique du n° 56, d'où tang. $\alpha = \frac{3f}{2c}$, les conditions de l'équilibre s'expriment en posant

$$\rho = P.c + P.f \text{tang.}\alpha, \text{ ou } \rho = Pc\left(1 + \frac{3f^2}{2c^2}\right);$$

d'où

$$2P = \frac{2\rho}{c + f\text{tang.}\alpha}, \text{ ou } 2P = \frac{2}{c\left(1 + \frac{3f^2}{2c^2}\right)},$$

84. Considérant un solide prismatique droit encastré horizontalement à une extrémité, comme celui représenté Fig. 9, et chargé de poids distribués arbitrairement sur la longueur AM. Nommant

x la distance horizontale d'un point quelconque du solide à l'extrémité A;

p la valeur du poids suspendu en ce point, rapportée à l'unité de longueur, et donnée en fonction de x;

c la distance AC.

On aura pour exprimer l'équilibre,

$$\rho = \int_0^c dx.px.$$

85. Si les poids portés par chacun des éléments de la longueur du solide sont égaux entre eux, p est constante, et l'on a

$$\rho = \frac{pc^2}{2}, \quad pc = \frac{2\rho}{c}.$$

Ainsi le solide serait également rompu par un poids distribué uniformément sur la longueur, ou par un poids moitié moindre, suspendu à l'extrémité B.

86. Lorsqu'un solide posé horizontalement sur deux appuis, comme on l'a supposé n° 83, est chargé par des poids distribués uniformément sur la longueur, p représentant la charge correspondante à l'unité linéaire, on a pc et pc tang. α pour les composantes verticales et horizontales de la pression supportée par les appuis. Par conséquent, en supposant que la courbe du solide est l'élastique du n° 59, d'où tang. $\alpha = \frac{8f}{5c}$, les conditions de l'équilibre sont exprimées par l'équation

$$\rho = pc.c + pc.f\,\text{tang.}\,\alpha - pc.\frac{c}{2},$$

ou

$$\rho = pc\left(\frac{c}{2} + f\,\text{tang.}\,\alpha\right), \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{pc^2}{2}\left(1 + \frac{16f^2}{5c^2}\right);$$

d'où

$$2pc = \frac{4\rho}{c + 2f\,\text{tang.}\,\alpha}, \quad \text{ou} \quad 2pc = \frac{4\rho}{c\left(1 + \frac{16f^2}{5c^2}\right)}.$$

Ainsi $\left(\text{en négligeant le quarré de } \frac{f}{c}\right)$ le solide est également rompu par un poids distribué uniformément sur la longueur, ou par la moitié de ce poids placée au milieu.

87. Lorsque le solide prismatique, posé horizontalement sur deux appuis, est chargé à la fois du poids 2 P placé au milieu, et du poids constant p sur chaque unité de longueur, l'équilibre est exprimé par l'équation

$$\rho = (P + pc)c + (P + pc)f\,\text{tang.}\,\alpha - pc.\frac{c}{2},$$

ou

$$\rho = (P + pc)(c + f\,\text{tang.}\,\alpha) - \frac{pc^2}{2};$$

d'où

$$2P = \frac{2\rho - pc(c + 2f \text{tang.}\alpha)}{c + f \text{tang.}\alpha}.$$

Dans le cas dont il s'agit, en supposant la courbure du solide déterminée conformément à ce qui a été fait n° 59, on a tang. $\alpha = \frac{3P + 2pc}{8P + 5pc} \cdot \frac{4f}{c}$: cette valeur doit être substituée dans les équations précédentes.

88. Pour appliquer les résultats précédents à un corps donné, il faudra substituer à la place de ρ l'expression du moment de rupture qui convient à la figure de la section transversale de ce corps, conformément aux nos 75 et suivants. On donnera ensuite à la constante R la valeur qui convient à la nature du corps, et qui doit être déterminée par l'observation.

Les observations au moyen desquelles on détermine la valeur de cette constante consistent à placer horizontalement un solide prismatique sur deux appuis, à le charger au milieu par des poids de plus en plus grands, et à observer simultanément le poids qui cause la rupture, et la flèche de courbure qui a lieu à l'instant ou cette rupture est prête à s'opérer. La section transversale du solide étant un rectangle (Fig. 2) dont les côtés sont a et b, on a (n° 77) $\rho = R\frac{ab^2}{6}$, et (n° 83) $2P = \frac{2\rho}{c\left(1 + \frac{3f^2}{2c^2}\right)}$, en faisant abstraction du poids du solide. Donc

$$2P = R\frac{ab^2}{3c\left(1 + \frac{3f^2}{2c^2}\right)}, \text{ d'où } R = \frac{2P.3c\left(1 + \frac{3f^2}{c^2}\right)}{ab^2},$$

$2c$ étant l'intervalle des appuis, $2P$ le poids placé

au milieu de la longueur du solide, f la flèche de courbure.

89. Si l'on a égard au poids du solide, il faut employer l'expression de $2P$ du n° 87. En nommant 2Π ce poids, cette expression devient

$$2P = \frac{Rab^2 - 3\Pi(c + 2f\,\text{tang.}\,\alpha)}{3(c + f\,\text{tang.}\,\alpha)},$$

d'où

$$R = \frac{3[(2P + 2\Pi)(c + f\,\text{tang.}\,\alpha) - \Pi c]}{ab^2};$$

et l'on a

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{3P + 2\Pi}{8P + 5\Pi} \cdot \frac{4f}{c}.$$

90. Lorsque les solides ont une petite longueur, ou ne prennent qu'une faible courbure à l'instant de la rupture, on peut négliger les termes du second ordre introduits par la considération de cette courbure : on a alors, en faisant abstraction du poids du solide,

$$2P = R\frac{ab^2}{3c}, \text{ d'où } R = 2P \cdot \frac{3c}{ab^2};$$

et en tenant compte de ce poids,

$$2P = R\frac{ab^2}{3c} - \Pi, \text{ d'où } R = (2P + \Pi)\frac{3c}{ab^2}.$$

On va maintenant rapporter les expériences faites pour évaluer la résistance à la rupture de divers corps, et au moyen desquelles on peut déterminer les valeurs de la constante R.

Résistance de la pierre et de la brique à la rupture.

91. D'après les expériences de M. Gauthey (*a*), un prisme en pierre calcaire dure de Givry, ayant 18 lig. de largeur et 8 lig. d'épaisseur, posé sur deux appuis distants de 18 lig., est rompu sous une charge de 143 livres placée au milieu. La résistance, pour la pierre tendre de Givry, n'est que le $\frac{1}{5}$ de la précédente.

92. D'après les expériences de M. Barlow (*b*), un prisme en brique de 4 pouces anglais de largeur et 2 pouces d'épaisseur, posé sur deux appuis distants de 8 pouces, rompt sous une charge au milieu de

343 liv. av. du poids pour la vieille brique commune.
403..... nouv. brique commune.
444..... très-bonne brique.

Résistance du mortier à la rupture.

93. Voyez dans les Recherches sur les chaux de construction, de M. Vicat, la détermination de la résistance à la rupture de diverses espèces de mortiers.

Résistance du bois à la rupture.

94. Il a été publié, sur la rupture des bois, un grand nombre d'expériences, parmi lesquelles on doit distinguer celles de Buffon, sur le bois de chêne nouvel-

---

(*a*) Mémoire sur la charge que peuvent porter les pierres; Journal de physique, 1774.

(*b*) *An essay on the strength and stress of timber*, page 250.

lement abattu (*a*). Les résultats moyens de ces expériences sont contenus dans le tableau suivant.

L'intervalle des appuis, représenté ci-dessus par $2c$, était de $\frac{1}{12}$ plus petit que les longueurs des pièces indiquées dans ce tableau.

Équarrissage des pièces.	Longueur des pièces.	Poids des pièces.	Charge au milieu qui a rompu.	Flèche à l'instant de la rupture.	
pouces.	pieds.	livres.	livres.	po.	lig.
4	7	58	5312	4	0
	8	66	4550	4	2
	9	74	4025	5	2
	10	83	3612	6	2
	12	99	2987	7	0
5	7	92	11525	2	6
	8	101	9787	2	9
	9	116	3308	3	3
	10	130	7125	3	10
	12	155	6075	5	8
	14	177	5300	8	1
	16	207	4350	8	1
	18	232	3700	8	1
	20	261	3225	9	5
	22	281	2975	11	3
	24	309	2162	12	3
	28	362	1775	20	0
6	7	127	18950		
	8	148	15525	2	5
	9	165	13150	2	8
	10	187	112[illegible]	3	3
	12	223	9100	4	1
	14	255	7475	4	4
	16	293	6362	5	8
	18	333	5562	7	11
	20	376	4950	9	2
7	8	203	26050	2	8
	9	226	22350	3	0
	10	253	19475	2	10
	12	302	16175	3	2

(*a*) Histoire naturelle, partie expérimentale, XIe Mémoire.

	14	351	13225	3 11
	16	405	11000	5 0
	18	452	9245	5 8
	20	503	8375	8 2
8	10	331	27750	2 8
	12	396	23450	3 0
	14	460	19775	3 6
	16	526	16375	4 6
	18	594	13200	4 3
	20	662	11487	6 3

En calculant la valeur de R par la formule du n° 89, au moyen des données de l'expérience sur une pièce de 6 pouces d'équarrissage et 10 pieds de longueur, on trouve : $R = 5\,862\,000^{\text{kil.}}$.

Si l'on cherche les valeurs de R données par toutes ces expériences, on ne trouvera dans ces valeurs que des différences qui peuvent être attribuées à la diversité des qualités des bois, ou aux erreurs des observations. Mais il n'en serait pas de même si l'on n'avait pas égard au poids des pièces et à la courbure, comme on l'a fait en établissant la formule du n° 89.

95. Expériences faites par Bélidor, sur des barreaux en bois de chêne (*a*).

Largeur des pièces.	Épaisseur.	Distance des appuis.	Charge au milieu qui rompt.	OBSERVATIONS.
1 pouces.	1 pouces.	18 pouces.	406 livres.	Non encastrée aux extrémités.
1	1	18	608	Encastrée aux deux extrémités.
2	1	18	805	Non encastrée.
1	2	18	1580	*Idem.*
1	1	36	187	*Idem.*
1	1	36	283	*Idem.*
2	2	36	1585	*Idem.*
20 lignes.	28 lignes.	36	1660	*Idem.*

(*a*) Science des ingénieurs, page 318.

96. Expériences faites par M. Rondelet, sur des barreaux en bois de chêne et de sapin (*a*).

Indication des bois.	Largeur des pièces.	Épaisseur des pièces.	Intervalle des appuis.	Charge au milieu qui rompt.	Flèche à l'instant de la rupture.
	pouces.	pouces.	pouces.	livres.	lignes.
Chêne.	2	2	24	2304	
	2	2	18	3105	
	2	3	24	5123	
	3	2	24	3475	
	1	1	42	312	22
	1	1	21	585	7
Sapin	1	1	42	281	22

97. Résultats moyens des expériences du colonel Beaufoy (*b*). Les barreaux ont 2 pouces anglais d'équarrissage, 4 pieds de distance entre les appuis.

INDICATION DES BOIS.	Pesanteur spécifique.	Charge au milieu qui rompt.
		livres avoir du poids.
Chêne de Dantzick.....	0,854	167
Sapin de Riga.	0,537	202
Épicea (*Pitch pine*).....		272
Chêne anglais.....	0,922	258
Idem.....		211

L'angle désigné par α, dans les n°s 83 et suivants, est, à l'instant de la rupture, d'environ 6°.

98. Résultats moyens des expériences de MM. J. Peake et Barailler (*c*). Les barreaux ont 2 pouces anglais d'é-

(*a*) Art de bâtir, tome IV, page 71 et 514.

(*b*) *An essay on the strength and stress of timber*, page 47.

(*c*) *Idem*, page 49.

quarrissage. Ils sont encastrés à l'une des extrémités, et le poids qui cause la rupture agit à 5 pieds de distance du point d'encastrement.

INDICATION DES BOIS.	PESANTEUR spécifique.	CHARGE qui rompt.
		livres avoir du poids.
Sapin de Riga, sec.....	0,633	153
..... humide...		172
Pin jaune de Virginie....	0,558	189
Épicea (*Pitch pine*).....	0,777	256
Pin blanc du Canada....	0,678	109
Larix.....	0,540	150
Larix de Dantzick.....	0,648	156
Frêne.....	0,782	217
Teak.....	6,309	264

Les flèches, à l'instant de la rupture, sont d'environ 14 pouces anglais.

99. Le tableau suivant est extrait de la table donnée par M. Barlow (*a*), comme offrant les résultats moyens des expériences faites sur diverses espèces de bois. Tous les barreaux avaient 2 pouces anglais d'équarrissage.

(*a*) *An Essay on the strength and stress of timber*, page 178.

INDICATION DES BOIS.	Distance des appuis.	Pesanteur spécifique.	Charge au milieu qui rompt.	Flèche à l'instant de la rupture.	Nombre proportionnel à la résistance à la rupture.
	pieds anglais.		livres avoir du poids.	pouces anglais.	
Teak.....	7	0,745	938	4,32	2488
Poon.....	7	0,579	846	5,92	2266
Chêne anglais.....	7	0,969	450	5,90	1205
Idem.....	7	0,934	637	8,10	1736
Chêne du Canada.....	7	0,872	673	6,00	1803
Chêne de Dantzick.....	7	0,756	560	4,86	1477
Chêne de l'Adriatique...	7	0,993	526	5,73	1409
Frêne.....	7	0,760	772	8,92	2124
Hêtre.....	7	0,696	593	5,73	1586
Orme.....	7	0,553	386	6,93	1042
Épicea (*Pitch pine*)....	7	0,660	622	6,90	1666
Pin rouge.....	7	0,657	511	5,83	1368
Sapin de la Nouvelle-Angleterre.....	7	0,553	420	4,66	1116
Sapin de Riga.....	7	0,753	422	6,00	1131
Idem.....	6	0,738	467	6,00	1091
Sapin de la forêt de Mar.	7	0,696	436	6,00	1168
Idem.....	6	0,693	561	6,42	1310
Idem.....	6	0,703	561	6,42	1310
Larix.....	7	0,531	325	8,58	890
Idem.....	6	0,522	370	5,00	850
Idem.....	6	0,556	501	5,00	1149
Idem.....	6	0,560	510	5,00	1172
Espares de Norwège....	6	0,577	655	4,00	1492

Nota. Le premier échantillon de chêne anglais était d'une qualité inférieure.

Les nombres de la dernière colonne, multipliés par 4217, donneront à fort peu près les valeurs de la constante R, le mètre étant l'unité de longueur, et le kilogramme l'unité de poids. La moyenne des expériences faites sur le chêne donne

$$R = 6\,435\,000^{\text{kil.}};$$

et la moyenne des expériences faites sur le sapin,

$$R = 5\,111\,000^{\text{kil.}}$$

100. Expériences de MM. Tredgold et Ebbels, sur des barreaux de diverses espèces de bois, posés horizontalement sur deux appuis, et chargés au milieu (*a*). Ces barreaux avaient 1 pouce anglais d'équarrissage.

INDICATION DES BOIS.	Pesanteur spécifique.	Intervalle des appuis.	Charge au milieu qui rompt.	Flèche à l'instant de la rupture.	Nombre proportionnel à la résistance à la rupture.
		pieds anglais.	livres av. du poids.	pouces anglais.	
Chêne anglais, jeune arbre	0,863	2	482	1,87	964
Idem, vieux bois de vaisseau	0,872	2,5	264	1,5	660
Idem, d'un vieil arbre.	0,625	2	218	1,38	436
Id., de qualité moyenne	0,748	2,5	284		710
Idem, vert	0,763	2,5	219		547
Idem, de Riga	0,688	2	357	1,25	714
Hêtre, de qualité moyenne	0,690	2,5	271		677
Anne	0,555	2,5	212		530
Platane	0,648	2,5	243		607
Sycomore	0,590	2,5	214		535
Chataignier vert	0,875	2,5	180		450
Frêne, d'un jeune arbre	0,811	2,5	324	2,5	810
Id., de qualité moyenne	0,690	2,5	254		635
Frêne	0,753	2,5	314	2,38	785
Orme commun	0,544	2,5	216		540
Orme, *wich*, vert	0,763	2,5	192		480
Acacia vert	0,820	2,5	249		622
Mahogany d'Espagne, sec	0,852	2,5	170		425
Id., de Honduras, sec.	0,560	2,5	255		637
Noyer vert	0,920	2,5	195		487
Peuplier d'Italie	0,374	2,5	131		327
Peuplier blanc	0,511	2,5	228	1,5	570
Saule	0,405	2,5	146	3	365
Boulean	0,720	2,5	207		517
Cèdre du Liban, sec.	0,486	2,5	165	2,75	412
Sapin de Riga	0,480	2,5	212	1,3	530
Sapin de Memel	0,553	2,5	218	1,15	545

(*a*) *Elementary principles of carpentry*, page 44.

Sapin de Norwège, de Longsonnd.....	0,639	2	396	1,125	792
Sapin d'Écosse.....	0,529	2,5	233	1,75	582
Idem.....	0,460	2,5	157		392
Sapin blanc de Christiania.....	0,512	2	343	0,937	686
Sapin blanc d'Amérique.....	0,465	2	285	1,312	570
Sapin blanc d'Angleterre.....	0,555	2,5	186		465
Pin d'Amérique, de Weymouth.....	0,460	2	329	1,125	658
Larix, échantillon choisi.....	0,640	2,5	253	3	632
Id., qualité moyenne.	0,622	2,5	223		557
Id., bois très-jeune...	0,396	2,5	129	1,75	322

Les nombres de la dernière colonne, multipliés par 12651, donneront les valeurs de la constante R déduites des données de chaque expérience, le mètre et le kilogramme étant les unités de longueur et de poids. Ces valeurs se trouveront calculées sans avoir égard à l'action du poids des pièces et à la courbure, comme elles le seraient par la première formule du n° 90; et par conséquent seront un peu trop petites.

Le résultat moyen des expériences sur le bois de chêne donne

$$R = 8\,501\,000^{\text{kil.}};$$

et le résultat moyen des expériences sur le bois de sapin donne

$$R = 7\,097\,000^{\text{kil.}}$$

101. Les circonstances de la flexion et de la rupture des bois, telles que les allongements et accourcissements des fibres, la situation de la fibre invariable, ont été étudiées dans des expériences faites par M. Ch. Dupin, mais qui n'ont pas encore été publiées. M. Barlow, dans l'ouvrage déja cité, a donné quelques recherches

sur cet objet. Elles apprennent que, quand un prisme en bois fléchit progressivement, les fibres situées sur la face concave s'accourcissent plus que celles situées sur la face convexe ne s'allongent. Le rapport de l'accourcissement des premières à l'allongement des secondes, égal à l'unité quand la flexion commence, croît progressivement jusqu'à devenir égal à 1,7 environ. La fibre invariable s'approche peu à peu de la face convexe. Dans les barreaux éprouvés par M. Barlow, elle a été observée communément, lors de la rupture, aux $\frac{5}{8}$ de la hauteur de la section, à compter de la face concave.

Ces effets sont rendus manifestes par une expérience remarquable, imaginée par Duhamel. Elle consiste à scier transversalement une pièce de bois du côté de la face concave, et à remplir le trait de scie par une cale de bois dur. La force de la pièce augmente un peu quand le trait de scie pénètre jusqu'au $\frac{1}{3}$ de l'épaisseur; elle est la même quand il pénètre jusqu'à moitié environ, et elle est peu diminuée quand il pénètre aux $\frac{3}{4}$ de l'épaisseur. Cette expérience a été répétée par M. Barlow, avec les mêmes résultats.

Résistance du fer fondu à la rupture.

102. Le tableau suivant contient les expériences faites par M. Banks (*a*). Les barreaux avaient 1 pouce anglais d'équarissage. Ils ont pris une flèche de 1 pouce environ lors de la rupture.

Distance des appuis.	Charge au milieu qui rompt.	Charge moyenne.
pieds anglais.	livres avoir du poids.	livres avoir du poids.
3	756	756
3	756	
2,5	1008	1008
3	735,5	735,5
3	963	972
3	958	
3	994	
3	864	869
3	874	

Le résultat moyen de ces expériences donne pour la valeur de la constante R qui convient au fer fondu

$$R = 31\,810000^{\text{kil.}},$$

le mètre et le kilogramme étant toujours les unités de longueur et de poids.

103. Résultats moyens des expériences faites au Creusot, par Ramus (*b*). Les barreaux ont $0^{m},0812$ d'é-

(*a*) *Treatise on the power of machines*, page 96.

(*b*) La Sidérotechnie, par M. Hassenfratz, tome I, page 47.

quarrissage. Ils sont encastrés à une extrémité. Le poids qui cause la rupture a un bras de levier de $2^m,11$.

FONTE MISE EN EXPÉRIENCE.	CHARGE qui rompt.
	kilogrammes.
Fonte blanche du Creusot, 1re fusion..	586
Fonte grise du Creusot, 1re fusion	895
Résultat moyen donné par des fontes grises de divers pays, 2e fusion.....	873
Fonte grise du Creusot, 2e fusion.....	911

On calcule la valeur de R résultant de ces observations, en observant que, P étant le poids placé à l'extrémité, Π le poids de la pièce, c le bras de levier du poids P, on a, d'après les nos 82, 85 et 77,

$$\left(P+\frac{\Pi}{2}\right)c=\rho=R\frac{ab^2}{6},$$

d'où

$$R=(2P+\Pi)\frac{3c}{ab^2},$$

Cette formule, appliquée au résultat moyen des expériences sur les fontes grises, donne

$$R=22\,460\,000^{\text{kil.}};$$

mais cette valeur est un peu incertaine, parce que les expériences ne sont pas décrites avec assez de précision, pour que l'on soit assuré de la longueur du bras de levier, et parce qu'on néglige l'effet de la courbure de la pièce.

104. Résultats de diverses expériences faites à l'École des ponts et chaussées, et rapportées par M. Gauthey (*a*).

Équarrissage des pièces.	Intervalle des appuis.	Charge au milieu qui rompt.	Nombre proportionnel à la résistance.
mètre.	mètre.	kilogrammes.	
0,0271	0,122	3143	19,3
0,0271	0,244	1943	23,9
0,0541	0,244	9178	14,1
0,0541	0,353	5752	12,8
0,0541	0,244	13006	20,0
0,0541	0,487	7250	22,2

Les nombres de la dernière colonne, multipliés par 1500000, donneront les valeurs de la constante R; la valeur moyenne déduite de ces expériences est

$$R = 28\,100\,000^{\text{kil.}}$$

105. Expériences faites par M. Rondelet (*b*). Les barreaux ont un pouce d'équarrissage.

FONTE mise en expérience.	Distance des appuis.	Charge au milieu qui rompt.	Charge moyenne.	Flèche à l'instant de la rupture.
	pouces.	livres.	livres.	lignes.
Fonte grise.....	42	450	450	6,25
Idem.....		450		6,75
Fonte douce.....	42	650		15,75
Idem.....		1062	656	14
Idem.....		350		4,25
Idem.....		561		10,5
Fonte grise.....	21	540	795	1
Idem.....		1050		2
Fonte douce.....	21	1650	1461	5,25
Idem.....		1272		2

(*a*) Traité de la construction des ponts, tome II, page 150.

(*b*) Art de bâtir, tome IV, page 514.

On déduit du résultat moyen des expériences sur la fonte grise, pour la valeur qui convient à la constante R,

$$R = 17973000^{kil.}$$

Le résultat moyen des expériences sur la fonte douce donne, pour la valeur de la même constante,

$$R = 29420000^{kil.}$$

106. Expériences faites par M. G. Rennie (*a*), sur des barreaux de fer fondu posés horizontalement sur deux appuis, et chargés au milieu. L'aire de la section transversale de tous ces barreaux est un pouce quarré anglais, à l'exception des deux derniers.

INDICATION DES PIÈCES.	Poids des pièces.		Distance des appuis.		Poids produisant la rupture.
	liv.	onc.	pi.	po.	livres.
Barre d'un pouce quarré	10	9	3		897
Idem	9	8	2	8	1086
Moitié de cette barre			1	4	2380
Barre d'un pouce quarré, posée diagonalement	9	8	2	8	851
Moitié de cette barre			1	4	1587
Barre de 2 pouces de hauteur sur $\frac{1}{2}$ pouce de largeur	9	5	2	8	2185
Moitié de cette barre			1	4	4508
Barre de 3 pouces de hauteur sur $\frac{1}{3}$ pouce de largeur	9	15	2	8	3588
Moitié de cette barre			1	4	6854
Barre de 4 pouces de hauteur sur $\frac{1}{4}$ pouce de largeur	9	7	2	8	3979
Prisme équilatéral, un angle en haut	9	11	2	8	1437
Idem, un angle en bas	9	7	2	8	840
Moitié de la première barre			1	4	3059
Moitié de la seconde			1	4	1656
Barre profilée suivant la forme d'un ⊥, contenu dans un quarré de 2 pouces de côté	10	0	2	8	3105
Barre profilée en demi-ellipse, contenue dans un rectangle de 4 po. de hauteur sur $\frac{1}{4}$ po. de largeur	7		2	8	4000
Idem, profilée en demi-parabole, le sommet en bas			2	8	3860

(*a*) *Philosophical transactions*, 1818; ou Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

D'après d'autres expériences sur des barreaux encastrés horizontalement à une extrémité, et chargés à l'autre extrémité d'un poids suspendu à 2 pieds 8 pouces du point d'appui, la charge qui cause la rupture est pour une barre d'un pouce quarré... 280 liv. av. du poids.

une barre de 2 pouces sur $\frac{1}{2}$.... 539

Le résultat obtenu sur la barre à base quarrée posée diagonalement, est conforme au rapport indiqué n° 78. La valeur moyenne de la constante R donnée par les expériences sur les barres à base quarrée ou rectangulaire, est

$$R = 38\,580\,000^{\text{kil.}}$$

On peut juger, d'après ces résultats, que la résistance du fer fondu à la rupture est envion quatre fois plus grande que celle du bois de chêne.

On n'a pas d'expériences concluantes sur la résistance du fer forgé à la rupture produite par un effort exercé perpendiculairement à la longueur des pièces.

Notions sur les théories de la résistance à la rupture proposées par Galilée, et par Mariotte et Léibnitz.

107. La première consistait à placer l'axe horizontal d'équilibre au point inférieur de la section de rupture, (Fig. 11), et à considérer la force intérieure développée en chaque point de cette section comme constante pour tous les points. Nommant

R la résistance pour l'unité superficielle;

a la largeur de la section;

$f_1 u$, $f_2 u$, les valeurs pm, pn de l'ordonnée du contour de la section qui répondent à une même abscisse u;

b la hauteur de la section;

on avait ainsi

$$R\int_0^a du\int_{f_1 u}^{f_2 u} dv.v,$$

pour l'expression du moment de la résistance à la rupture. Cette expression, dans le cas où la section est un rectangle dont les côtés sont a, b, devient

$$R\frac{ab^2}{2}.$$

La théorie attribuée communément à Mariotte et à Léibnitz, consistait à placer également l'axe horizontal d'équilibre au point inférieur de la section, et à supposer la force intérieure développée en chaque point proportionnelle à la distance de ce point à l'axe d'équilibre. Le moment de la résistance à la rupture était alors

$$\frac{R}{b}\int_0^a du\int_{f_1 u}^{f_2 u} dv.v^2.$$

Il devenait, dans le cas du rectangle,

$$R\frac{ab^2}{3}.$$

Remarque sur la théorie de la résistance à la rupture.

108. La théorie présentée dans les nos 75 et suivants est fondée sur l'hypothèse que les fibres longitudinales, à l'instant de la rupture, offrent des résistances proportionnelles aux extensions et contractions de ces fibres, et qui sont égales pour des extensions et contractions égales. La situation de l'axe d'équilibre contenant les fibres invariables est déterminée par la condition énon-

cée nos 47 et 48, en sorte que cet axe est au milieu de la hauteur de la section, quand la section peut être partagée dans la hauteur en deux parties symétriques, comme cela a lieu pour le rectangle et le cercle.

Si cette hypothèse était exactement conforme aux effets naturels, les valeurs de la constante R déduites, au moyen des formules précédentes, des expériences sur la rupture rapportées dans les nos 91 et suivants, ne différeraient point des résultats obtenus par les expériences directes sur la rupture des corps produite par extension ou par écrasement. Lorsque cet accord n'a pas lieu, on doit l'attribuer à ce que les fibres des corps n'opposant pas, quand la rupture vient à s'opérer, des résistances égales à l'extension et à la compression, l'axe d'équilibre change de situation, en sorte que les expressions du moment de rupture ne s'accordent pas avec l'état solide.

On doit remarquer toutefois, 1° que les principaux résultats obtenus précédemment n'en sont pas moins vrais; en sorte que les résistances des bases rectangulaires sont toujours proportionnelles à la largeur et au quarré de l'épaisseur, et que les résistances des bases de figures semblables le sont toujours au cube des dimensions homologues. Les rapports seuls des résistances pour les bases de diverses figures sont changés. 2° Dans les applications, on n'est point dans le cas de calculer les résistances respectives des corps en les considérant dans l'état qui précède la rupture : on les considère, au contraire, lorsqu'ils n'ont pu prendre encore qu'une légère flexion, qui n'en a point altéré l'élasticité; et les résultats précédents conviennent alors sensiblement à la manière dont la résistance s'exerce.

ARTICLE V.

De la résistance d'un corps prismatique à la torsion.

109. La théorie de ce genre de résistance peut être formée au moyen de considérations analogues à celles employées pour la résistance à la flexion.

Soit (Fig. 12) un solide prismatique encastré horizontalement à l'une des extrémités. Supposons qu'une force P agisse à l'autre extrémité avec le bras de levier B*c* pour tordre le solide autour de l'axe C*c*. Imaginons que, par l'effet de la torsion, un diamètre *b b* de la section extrême, sur laquelle agit la force P, se soit transporté en *b' b'*. Le diamètre correspondant A A de l'extrémité encastrée n'aura éprouvé aucun déplacement; et on doit concevoir que tous les diamètres des sections intermédiaires, tels que *d d*, se sont déplacés proportionnellement à la distance C*e* de l'extrémité encastrée. Par l'effet de ces déplacements, les molécules qui, dans deux sections transversales consécutives, étaient avant la torsion vis-à-vis les unes des autres, ont été éloignées d'une quantité proportionnelle 1° à la distance de ces molécules à l'axe C*c*; 2° à la différence des angles parcourus par chaque diamètre dans deux sections transversales consécutives, différence proportionnelle à l'angle *b c b'*, et réciproque à la longueur C*c* du solide. On peut supposer, la torsion étant censée très-petite, que les résistances naissant des déplacements relatifs sont proportionelles à ces déplacements. Le moment de la résistance qui a lieu dans une section quelconque du solide, doit d'ailleurs être

égal au moment du poids P. Considérons une section transversale quelconque, et nommons

c la longueur du solide, depuis la section fixe AA jusqu'à celle bb où agit la force P;

θ l'angle bcb' décrit par les diamètres de cette section extrême, angle qui est supposé fort petit;

ρ la distance d'un point quelconque d'une section transversale au centre e de cette section;

φ l'angle de la ligne ρ avec un diamètre de la même section;

$\rho = f(\varphi)$ l'équation de la courbe qui forme le contour de la section;

R le bras de levier Bc avec lequel la force P agit pour produire la torsion;

t un poids constant pour chaque espèce de corps, représentant la résistance spécifique à la torsion.

L'élément de l'aire de la section transversale placé à l'extrémité du rayon ρ étant $d\varphi\, d\rho . \rho$, on aura

$$t\frac{\theta}{c} d\varphi . d\rho . \rho^2$$

pour la résistance provenant de la torsion qui a lieu dans cet élément; et pour exprimer l'équilibre entre le moment de la force P, et la somme des moments des résistances semblables,

$$PR = \frac{t\theta}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} d\rho . \rho^3,$$

ou

$$PR = \frac{t\theta}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi . \tfrac{1}{4}[f(\varphi)]^4.$$

110. La section transversale étant un cercle dont r

est le rayon, on a $f(\varphi)=r$, et la formule donne

$$PR=\frac{t\theta}{c}\cdot 2\pi\frac{r^4}{4}=t\frac{\pi r^4\theta}{2c},\ \text{d'où}\ \theta=\frac{P}{t}\cdot\frac{2cR}{\pi r^4}.$$

111. La section transversale étant un rectangle dont les côtés sont a et b (Fig. 13), on doit chercher à part l'expression de la résistance à la torsion de l'un des quatre triangles égaux à ABC, et de l'un des quatre triangles égaux à BDC. L'équation de AB est $\rho=\frac{a}{2\cos.\varphi}$. On a d'ailleurs

$$\int d\varphi\frac{1}{\cos.^4\varphi}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin.\varphi}{\cos.^3\varphi}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi}.$$

Ainsi le moment de la résistance du triangle ABC est

$$\frac{t\theta}{c}\cdot\frac{a^4}{4.16}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin.\varphi}{\cos.^3\varphi}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi}\right),$$

l'angle φ étant celui dont la tangente $=\frac{b}{a}$. Le moment de la résistance du triangle BDC est

$$\frac{t\theta}{c}\cdot\frac{b^4}{4.16}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin.\varphi}{\cos.^3\varphi}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi}\right),$$

l'angle φ étant celui dont la tangente $=\frac{a}{b}$. Ajoutant ces deux expressions et multipliant par 4, on aura pour le moment total de la résistance du rectangle

$$PR=\frac{t\theta}{c}\cdot\frac{1}{16}\frac{4ab(a^2+b^2)}{3}=t\frac{ab(a^2+b^2).\theta}{12c},$$

d'où

$$\theta=\frac{P}{t}\cdot\frac{12cR}{ab(a^2+b^2)}.$$

Dans le cas du quarré, le moment de la résistance est

$$PR = t\frac{a^4\theta}{6c}, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{P}{t}\cdot\frac{6cR}{a^4}$$

Le moment de la résistance du quarré est à celui de la résistance du cercle inscrit, dans le rapport de 1 à $\frac{3\pi}{16}$.

112. Les résultats des n^{os} précédents serviront à calculer l'angle de torsion affecté par un corps prismatique sous un effort donné, lorsque la valeur de la constante t aura été déterminée par des expériences préliminaires. Ces expériences consistent à observer simultanément l'angle de torsion d'un corps, le poids qui produit la torsion, et le bras de levier au bout duquel agit ce poids. La valeur de t se calcule par les formules des n°s 110 et 111, qui donnent, si le corps est rond,

$$t = P\frac{2cR}{\pi r^4.\theta};$$

et si le corps est quarré,

$$t = P\frac{6cR}{a^4.\theta}.$$

Le fer forgé est le seul corps sur lequel il ait été fait des expériences propres à faire connaître la valeur de la constante t.

Résistance du fer forgé à la torsion.

113. Le tableau suivant contient les résultats des expériences faites par M. Duleau, sur la résistance du

fer forgé à la torsion (*a*). Le poids qui produit la torsion est 10 kilogrammes, et le bras de levier de ce poids est $0^m,32$.

DÉSIGNATION DES FERS.	LONGUEUR	GROSSEUR.	ANGLE de torsion.	NOMBRES proportionnels à la résistance.
	mètre.	mètre. diamètre.	degrés sexag.	
Fer rond du Périgord..	2,81	0,0142	13,4	12,57
Idem.....	3,17	0,0197	6	11,47
Fer rond anglais, marqué *Dowlais*.....	2,40	0,0198	4	12,41
Fer rond de l'Ariège....	3,57	0,0215	4,8	11,16
Idem.....	2,89	0,0215	4,5	9,6
Fer rond du Périgord...	3,19	0,0221	3,32	11,99
Idem.....	2,89	0,0230	3	10,96
Fer rond anglais.....	3,24	0,0235	2,34	14,48
Fer rond du Périgord...	2,94	0,0265	1,82	10,48
Idem.....	3,35	0,0267	1,87	11,23
Idem.....	2,92	0,0357	0,625	9,19
Fer rond de l'Ariège....	2,77	0,0268	1,65	10,39
Fer quarré anglais, marqué C 2.....	4,12	côtés. 0,0200	6,5	17,46
Idem.....	2,52	0,0200	4	17,36
Fer quarré du Périgord.	2,52	0,0204	3,08	15,27
Idem.....	3,39	0,0326	0,62	15,40
Fer plat anglais.....	2,91	0,0340 / 0,0086	11,4	
Idem.....	1,55	0,0340 / 0,0086	5,62	
Fer plat du Périgord...	2,91	0,0340 / 0,0105	7,2	
Fer plat anglais, marqué B.....	1,45	0,0678 / 0,0147	0,85	

Les nombres de la dernière colonne, déduits des expériences sur les fers ronds, étant multipliés par 10.186.000, donneront les valeurs de la constante *t* fournies par chaque expérience, le mètre et le kilogramme

(*a*) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, page 49.

étant les unités de longueur et de poids. La valeur moyenne de ces nombres est 11,33; et la valeur correspondante de t est

$$t = 115410\,000^{k}.$$

Les nombres de la dernière colonne, déduits des expériences sur les fers quarrés, doivent être multipliés par 6 000 000 pour donner les valeurs de t. La valeur moyenne de ces nombres est 16,03, et la valeur correspondante de t est

$$t = 96\,180\,000^{k}.$$

La différence des deux résultats tient sans doute presque entièrement à la diversité des qualités des fers. Peut-être peut-on en attribuer une partie à ce que les formules précédentes relatives aux corps quarrés, ne représentent pas aussi exactement les effets naturels que celles relatives aux corps ronds.

ARTICLE VI.

De la résistance d'un corps prismatique à la rupture causée par la torsion.

114. La torsion d'un solide en cause la rupture quand les molécules qui se trouvent le plus éloignées les unes des autres ne peuvent l'être davantage sans se désunir. Supposant qu'à l'instant où la rupture a lieu, les résistances des éléments du solide ont encore entre elles les rapports admis dans le n° 109, on formera comme il suit l'expression du moment de la résistance à la rupture. Conservant les dénominations du n° 109, et appelant

r la plus grande valeur de ρ dans la section transversale du solide;

T un poids exprimant la résistance à la torsion, rapportée à l'unité de surface, à l'instant où la rupture a lieu;

$\frac{T\rho}{r}$ sera la résistance à la torsion, à l'instant de la rupture, pour les points des sections transversales situées a la distance ρ de l'axe du solide. On aura

$$\frac{T}{r}\cdot d\varphi . d\rho . \rho^2$$

pour la résistance d'un élément de la section transversale; et pour l'équation d'équilibre,

$$PR = \frac{T}{r}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} d\rho . \rho^3 = \frac{T}{r}\int_0^{2\pi} d\varphi . \tfrac{1}{4}[f(\varphi)]^4.$$

En comparant cette expression de PR à celle du n° 109, on reconnaît que les valeurs du moment de la résistance à la rupture se déduiront des valeurs trouvées dans les nos 110 et suivants, en écrivant T au lieu de $\frac{t\theta}{c}$, et divisant par r.

115. Quand la section transversale est un cercle, la valeur du moment de la résistance à la rupture est donc

$$PR = T\frac{\pi r^3}{2}.$$

116. Quand la section transversale est un quarré, a étant le côté, $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$; la même valeur est

$$PR = T\frac{\sqrt{2}.a^3}{6}.$$

Les moments des résistances, pour le quarré et le

cercle qui lui est inscrit, sont dans le rapport de 1 à $\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$.

117. La longueur d'un solide entre les deux extrémités n'influe point sur la résistance à la rupture causée par la torsion; seulement, plus le solide est long, et plus l'angle dont on l'aura tordu pour le rompre sera grand. Les formules précédentes serviront à calculer les efforts nécessaires pour opérer la rupture d'un solide prismatique, lorsque la valeur de la constante T aura été déterminée par l'observation. Cette valeur se conclura des données de chaque expérience, si le corps est rond, par la formule

$$T = P\frac{2R}{\pi r^3},$$

P représentant le poids qui opère la torsion, R le bras de levier de ce poids, et r le rayon du cylindre tordu; et, si le corps est quarré, par la formule

$$T = P\frac{6R}{\sqrt{2}.a^3},$$

a étant le côté de la section transversale. On va exposer les expériences dont la valeur de la constante T peut être déduite.

Résistance du fer fondu à la rupture causée par la torsion.

118. D'après un résultat rapporté par M. Banks, comme offrant une moyenne entre plusieurs expériences (*a*); une barre de fer fondu, de 1 pouce anglais

(*a*) *On the power of machines.*

d'équarrissage, est rompue par un poids de 631 livres avoir du poids, dont le bras de levier est de 2 pieds anglais.

La valeur de T conclue de ce résultat par la seconde des deux formules du n° précédent est

$$T = 45\,160\,000^k,$$

le mètre et le kilogramme étant les unités de longueur et de poids.

119. Le tableau suivant contient les résultats des expériences faites par M. Dunlop, à Glasgow (*a*), sur des barres cylindriques. Les poids agissaient avec un bras de levier de 14 pieds 2 pouces anglais.

Longueur des pièces.	Diamètre.	Poids produisant la rupture.
pouces angl.	pouces angl.	livres avoir du poids.
2 $\frac{3}{4}$	2	250
3 $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{4}$	384
3	2 $\frac{1}{2}$	408
3	2 $\frac{3}{4}$	700
4	3 $\frac{1}{4}$	1170
5	3 $\frac{1}{2}$	1240
5	3 $\frac{3}{4}$	1662
5	4	1938
6	4 $\frac{1}{4}$	2158

La valeur moyenne de T, conclue des données de ces expériences, est

$$T = 20\,305\,000^k.$$

120. On trouvera dans le tableau suivant les résultats des expériences sur la torsion du fer fondu et de divers

(*a*) *Dr Thomson's annals of philosophy*, tome XIII, page 200.

autres métaux, faites par M. G. Rennie (*a*). Les poids agissaient à l'extrémité d'un bras de levier de 2 pieds anglais.

INDICATION des corps SOUMIS A LA TORSION.	LONGUEUR des pièces.	ÉQUARRISSAGE.	POIDS MOYEN produisant la rupture.	
	pouces anglais.	pouce anglais.	livres avoir du poids. livres.	onces.
Fer coulé horizontalement.....	0	$\frac{1}{4}$	9	15
Fer coulé verticalement.....	0	$\frac{1}{4}$	10	10
Fer coulé horizontalement.....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	7	3
Idem.....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	1
Idem.....	1	$\frac{1}{4}$	8	8
Fer coulé verticalement.....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	10	1
Idem.....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	9
Idem.....	1	$\frac{1}{4}$	8	5
Idem.....	6	$\frac{1}{4}$	9	12
Fer coulé horizontalement.....	0	$\frac{1}{2}$	93	12
Idem.....	0	$\frac{1}{2}$	74	0
Idem.....	10	$\frac{1}{2}$	52	0
Acier.....	0	$\frac{1}{4}$	17	1
Fer forgé d'Angleterre.....	0	$\frac{1}{4}$	10	2
Fer forgé de Suède.....	0	$\frac{1}{4}$	9	8
Métal de canon dur.....	0	$\frac{1}{4}$	5	0
Fonte jaune fine.....	0	$\frac{1}{4}$	4	11
Cuivre coulé.....	0	$\frac{1}{4}$	4	5
Étain.....	0	$\frac{1}{4}$	1	7
Plomb.....	0	$\frac{1}{4}$	1	0

Le résultat moyen des expériences sur le fer fondu donne pour la valeur de la constante T,

$$T = 41360000^{k}.$$

(*a*) *Philosophical transactions*, 1818; ou Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

ARTICLE VII.

Des plus grands efforts auxquels les matériaux employés dans les constructions peuvent être exposés avec sécurité.

121. Les notions présentées dans les articles précédents font connaître les lois de la flexion et de la rupture des corps; c'est-à-dire les degrés de courbure et de torsion qu'un solide prismatique affecte sous un effort donné, et l'effort nécessaire pour rompre ce solide. Ces notions ne suffisent point pour mettre à même de régler les dimensions des pièces employées dans les constructions. Il faut en effet que l'on puisse être assuré, non-seulement que les forces agissant sur chaque pièce n'en causeront point immédiatement la rupture; mais même que l'action permanente, ou fréquemment répétée, de ces forces, ne produira point dans les parties des édifices des altérations qui puissent faire avec le temps des progrès, et en amener la destruction. On doit, autant qu'il est possible, disposer les constructions de manière à n'y laisser d'autres causes de dépérissement, que celles qui dépendent des altérations chimiques des corps; et s'efforcer de prévenir ces altérations par des procédés d'entretien. Les déterminations dont il s'agit ne sont pas susceptibles d'une aussi grande précision que celles dont on s'est occupé précédemment. On va exposer les principaux résultats que l'expérience a fournis sur ce sujet.

De la pierre exposée à l'écrasement.

122. Les petits cubes de pierre soumis à l'expérience commencent à se fendiller sous des poids qui surpassent un peu la moitié de ceux marqués dans les tables comme ayant produit l'écrasement. Cet écrasement peut d'ailleurs être produit par une force moindre, lorsque l'action de cette force s'exerce pendant long-temps (*a*). Nous insérons ici l'indication donnée par M. Rondelet (*b*) des pressions exercées sur une surface de 25 centimètres quarrés, dans les constructions regardées comme les plus hardies.

Piliers du dôme de Saint-Pierre de Rome....	409 kil.
Piliers du dôme de Saint-Paul de Londres...	484
Piliers du dôme des Invalides.....	369
Piliers du dôme de Sainte-Geneviève.....	736
Colonnes de Saint-Paul hors des murs, à Rome.	494
Piliers de la tour de l'église de Saint-Méry...	735
Colonnes de l'église de Toussaint d'Angers (*c*).	1107

Dans les assises inférieures des piles du pont de Neuilly, construites en pierre de Saillancourt, la pression est de 3611 livres par pied quarré. Un cube de cette pierre, de 2 pouces de côté, exige, pour être écrasé, un effort de plus de 16000 livres.

(*a*) M. Rondelet, Art de bâtir, tome III, page 101.

(*b*) Art de bâtir, tome III, page 74.

(*c*) Elles sont construites avec une pierre calcaire d'un gris roussâtre, coquilleuse et très-dure. Un cube de 5 centimètres de côté s'écrase sous 10940 kil.

D'après MM. Telford et Nimmo, la pierre porte de 250 000 à 850 000 livres avoir du poids par pied quarré anglais, et la brique 300 000 livres. On leur fait porter dans les constructions le $\frac{1}{6}$, et au-delà. Le pilier du centre de la salle du chapitre, à Elgin, fait avec un grès rouge, est chargé de plus de 40 000 livres par pied quarré, et a supporté en outre, pendant plusieurs siècles, un pesant comble couvert en plomb. La pression des voussoirs d'une arche peut être portée avec sécurité à 50 000 livres par pied quarré (*a*) (610 kil. pour une surface de 25 centimètres quarrés).

D'après l'expérience des constructions, on ne doit pas exposer les pierres à une pression surpassant le $\frac{1}{10}$ de celle qui produit l'écrasement dans les essais faits sur de petits cubes. Cette détermination ne donnerait même une entière sécurité, qu'autant que les pierres seraient taillées et posées de manière a être pressées bien également sur toute la surface des joints; et si, d'après leur qualité, elles n'étaient pas sujettes à se fendre et à s'éclater. Autrement il faudrait que l'effort fût moins considérable.

Du bois exposé à l'écrasement et à l'extension.

123. D'après les expériences rapportées nos 10 et 11, 24 et 25, les résistances opposées à l'écrasement et à l'extension par les fibres du bois sont très-différentes, la première n'étant pas la moitié de la seconde. Cette circonstance s'accorde avec la remarque no 101. La résistance à l'écrasement peut être évaluée à environ 3 kil. pour chaque millimètre quarré de la section transversale, pour le bois de chêne ou de sapin; et la force de

(*a*) *The Edinburgh encyclopædia*, art. *Bridge*.

cohésion à environ $8^{kil.}$. On ne doit point exposer les pièces employées dans les constructions à des pressions qui surpassent le $\frac{1}{5}$ de celles qui causeraient l'écrasement. Cette règle peut servir à déterminer les dimensions et l'espacement des pieux de fondation : elle s'accorde avec les indications données par M. Perronet (*a*), et fondées sur l'expérience.

Du bois exposé à la flexion transversale.

124. La limite de la charge à laquelle une pièce peut être exposée doit être déterminée par la condition que la flexion causée par cette charge, et les allongements et accourcissements des fibres longitudinales qui en résultent, ne soient point capables d'altérer la constitution physique du bois; en sorte que la pièce, étant déchargée, reprenne sa figure naturelle, et que la courbure de cette pièce n'augmente pas avec le temps. Il n'existe pas d'expériences spéciales qui fassent connaître avec certitude, pour le bois, la limite dont il s'agit.

D'après les résultats rapportés n° 94 et suivants, la valeur moyenne de la constante R, pour le bois de chêne, est à peu près $R = 6\,000\,000^{kil.}$. L'expérience des constructions apprend que l'on ne doit pas faire supporter aux bois des charges qui surpassent le $\frac{1}{10}$ de celles qui causeraient la rupture (*b*). Nous désignerons par R' le plus grand effort que l'on doive faire supporter aux fibres longitudinales d'un corps, sur l'unité superficielle. On aura donc, pour le bois de chêne,

(*a*) OEuvres de Perronet, Mémoire sur les pieux et pilotis. Des pieux de $0^{m},25$ et de $0^{m},32$ de diamètre, ne doivent pas être chargés de plus de $25\,000^{kil.}$ et $50\,000^{kil.}$.

(*b*) Voyez Rondelet, Art de bâtir, tome IV, page 83.

$R' = 600\ 000^{kil.}$. On calculera, dans chaque cas, les plus grandes charges auxquelles une pièce puisse être exposée, en mettant la valeur de R' à la place de celle de R dans les formules des nos 82 et suivants.

En supposant, conformément aux expériences rapportées n° 63 et suivants, que l'on ait pour le bois de chêne $E = 1\ 000\ 000\ 000^{kil.}$, une charge de $600\ 000^{kil.}$ produit dans les fibres une variation de longueur de 0,0006. Cette variation devrait être regardée comme la plus grande qu'il fût possible de produire sans altérer l'élasticité naturelle de ce bois. D'après M. Tredgold (*a*), on peut faire supporter aux fibres du chêne un effort de 3960 livres par pouce quarré anglais (2 780 $000^{kil.}$ par mètre quarré) et une extension de $\frac{1}{430} = 0,0023$. Mais ces résultats ne paraissent pas applicables aux constructions qui doivent durer long-temps.

La force du sapin jaune ou rouge est au moins égale à celle du chêne : celle du sapin blanc est un peu moindre.

Du fer forgé exposé à l'extension.

125. Les expériences rapportées dans les nos 28 et suivants, apprennent que les barres de fer forgé, tirées dans le sens de la longueur, sont rompues par une force moyenne de $40^{kil.}$ par millimètre quarré de la section transversale. D'après un examen attentif des résultats des expériences, et l'exemple des constructions, on ne doit pas faire supporter à ces barres une charge permanente plus grande que que 6 à 7 kilogrammes par millimètre quarré ; et une charge totale, composée

(*a*) *Practical Essay on the strength of cast iron*, 2e édition, p. 279.

d'une partie permanente et d'une partie accidentelle, plus grande que 8 à 10 kilogrammes par millimètre quarré.

Du fer forgé exposé à la flexion transversale.

126. En supposant, conformément à ce qui vient d'être dit, que la limite des flexions qu'on laissera prendre aux pièces, est déterminée par la condition que l'extension des fibres soit due seulement à une charge de $10^{kil.}$ par millimètre quarré, on devra supposer, pour le forgé, $R' = 10\,000\,000^{kil.}$ (voyez ci-dessus n° 124); et calculer les plus grandes charges à faire supporter aux pièces par les formules des n°s 82 et suivants, en mettant à la place de R cette valeur de R'.

On a, pour le forgé, $E = 20\,000\,000\,000^{kil.}$ (n° 70) : par conséquent la charge de $10\,000\,000^{kil.}$ produit dans les fibres une variation de longueur de 0,0005, que l'on regarde ici comme la limite de celles que l'on peut produire sans altérer la constitution du fer. M. Duleau a donné l'expression du plus grand poids dont on puisse charger les pièces de fer, en prenant pour cette limite 0,0003 (*a*). Cette fraction répond aux plus petites valeurs indiquées par les expériences, dont la moyenne est à peu près 0,00065. Ce dernier allongement serait produit par une charge de $13^{kil.}$ par millimètre quarré, égale au $\frac{1}{3}$ de celle qui causerait la rupture. D'après M. Tredgold, le fer peut supporter sans altération une tension de 17800 livres avoir du poids par pouce quarré anglais ($12^{kil.}$,5 par millimètre quarré), et une extension de $\frac{1}{1400} = 0,00071$ (*b*).

(*a*) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, page 79.

(*b*) *A practical Essay on the strength of cast iron*, 2e édit., p. 104.

Du fer fondu exposé à l'écrasement et à l'extension.

127. Le fer fondu offre une grande résistance à l'écrasement, lorsque les pièces sont trop courtes pour pouvoir plier. D'après les expériences rapportées dans les nos 15 et suivants, la force nécessaire pour produire l'écrasement est environ 100kil. par millimètre quarré. Il n'existe pas d'expériences d'après lesquelles on puisse apprécier exactement la limite des charges auxquelles les pièces peuvent être exposées dans les constructions; mais il est très-vraisemblable que ces charges peuvent être portées au $\frac{1}{4}$ de celles qui causeraient l'écrasement.

128. D'après les expériences citées dans les nos 40 et 41, la force de cohésion du fer fondu est de 13 ou 14kil. par millimètre quarré. Cette force est beaucoup moindre que la résistance à l'écrasement. On peut également porter les charges dans les constructions au quart de celles qui produiraient la rupture. Mais des pièces de fer fondu employées de cette manière offriraient peu de sécurité, si la construction était exposée à de fortes secousses.

Du fer fondu exposé à la flexion transversale.

129. D'après les expériences citées dans les nos 102 et suivants, la valeur de R qui convient à la fonte de bonne qualité est moyennement $R = 28\,000\,000^{kil.}$. On peut charger les pièces du quart du poids qui causerait la rupture, et supposer $R' = 7\,000\,000^{kil.}$ Les plus grandes charges qu'il soit possible de donner aux pièces, se calculeront par les formules des nos 82 et suivants, dans lesquels on remplacera R par cette valeur de R'.

En supposant que l'on ait, pour la fonte douce, conformément aux expériences citées nos 72 et 73, $E = 11\,000\,000\,000^{kil.}$, une tension de $7\,000\,000^{kil.}$ correspondra à un allongement de 0,000 64, allongement que l'on regarde ici comme la limite de ceux que l'on peut faire supporter au fer fondu sans en altérer la constitution. D'après M. Tredgold (*a*), cette limite est $\frac{1}{1204} = 0,000\,83$, et la plus grande tension que cette matière puisse supporter sans altération et 15300 livres avoir du poids sur un pouce quarré anglais ($10^{kil.},7$ par millimètre quarré).

DEUXIÈME SECTION.

DE L'ÉQUILIBRE ET DE LA RÉSISTANCE DES MASSIFS FORMÉS DE MATIÈRES ADHÉRENTES. — DE L'ÉTABLISSEMENT DES MURS DE REVÊTEMENT DES TERRES.

130. Les massifs, dans les constructions, sont formés par des terres, des sables, de la maçonnerie. Pour établir les lois de l'équilibre et de la résistance de ces massifs, on les regarde en premier lieu comme des masses homogènes, dont les parties adhèrent les unes aux autres, et n'ont pas plus de tendance à se séparer dans une direction que dans une autre. On examine ensuite ce qui doit arriver quand les massifs sont formés de matériaux taillés régulièrement, et posés par assises.

(*a*) *A practical Essay on the strength of cast iron*, page 151.

ARTICLE PREMIER.

De l'équilibre d'un massif coupé latéralement.

131. Considérant un massif dont la surface supérieure est terminée par un plan horizontal CD (fig. 14), et qui est coupé latéralement par un plan AC, on regarde ce corps comme susceptible de se partager suivant une direction rectiligne inclinée quelconque AT, la partie ACT glissant sur AT. Il s'agit de déterminer l'inclinaison que doit avoir le talus AC, pour qu'il ne se fasse aucune disjonction dans le massif. On nommera

h la hauteur AE de la coupure faite dans le massif;
m le rapport de la base à la hauteur du talus AC, ou la tangente de l'angle EAC;
θ l'angle EAT;
π le poids de l'unité de volume de la matière du massif;
γ la force, rapportée à l'unité superficielle, nécessaire pour séparer deux portions du massif, en les faisant glisser l'une sur l'autre;
f le rapport du frottement à la pression, pour deux portions du massif glissant l'une sur l'autre.

On aura, pour le poids du prisme CAT,

$$\frac{\pi h^2}{2}(\text{tang.}\,\theta - m);$$

pour la force qui tend à le faire glisser le long de AT,

$$\frac{\pi h^2}{2}(\text{tang.}\,\theta - m)\cos.\theta;$$

et pour la force qui s'oppose à ce glissement,

$$\frac{f\pi h^2}{2}(\text{tang.}\,\theta - m)\sin.\theta + \frac{\gamma h}{\cos.\theta}.$$

L'équation qui exprime l'égalité de ces deux forces est

$$(\text{tang.}\,\theta - m)(1 - f\,\text{tang.}\,\theta) = \frac{2\gamma}{\pi h}(1 + \text{tang.}^2\theta),$$

et l'on en déduit

$$m = \text{tang.}\,\theta - \frac{2\gamma}{\pi h}\cdot\frac{1 + \text{tang.}^2\theta}{1 - f\,\text{tang.}\,\theta}.$$

132. Si l'on détermine la valeur de θ qui rend cette expression un maximum, on connaîtra à la fois la plus petite valeur qu'il soit possible de donner à m, et la direction suivant laquelle le massif se romprait, si l'on donnait à m une valeur un peu au-dessous de celle qui convient à l'équilibre.

Cette valeur de θ est donnée par l'équation

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{1}{f}\left\{1 - \sqrt{\left(\frac{\frac{2\gamma}{\pi h}(1+f^2)}{\frac{2\gamma}{\pi h} + f}\right)}\right\};$$

et en la substituant dans l'expression de m du n° précédent, on a

$$m = \frac{1}{f} + \frac{2}{f^2}\left[\frac{2\gamma}{\pi h} - \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi h}\left(\frac{2\gamma}{\pi h} + f\right)(1+f^2)}\right].$$

pour la limite de l'inclinaison suivant laquelle le massif peut être coupé sans qu'il survienne d'éboulement.

Si l'on résout cette équation par rapport à h, on connaîtra la plus grande hauteur sur laquelle le massif peut se soutenir avec l'inclinaison m.

133. Si h est très-petit, cette formule donnera pour m une valeur négative; en sorte qu'on pourrait alors couper le massif, sans qu'il y eût éboulement, suivant un plan tracé à gauche de la verticale AE, et à plus forte raison, suivant un plan vertical. En faisant

$$h=\frac{4\gamma}{\pi}(f+\sqrt{1+f^2}),$$

la formule précédente donnera $m=0$: ainsi, sur la hauteur exprimée par cette formule, le massif tranché verticalement se maintiendra encore en équilibre. Mais, en donnant à h des valeurs plus grandes, on aura pour m des valeurs positives croissantes, jusqu'à une limite que l'on trouve en supposant h infini, et qui est

$$m=\frac{1}{f}.$$

Cette limite répond à l'inclinaison que la surface du massif prendrait d'elle-même, en supposant la cohésion des parties détruites, et admettant qu'elles ne se maintiennent que par l'effet seul du frottement.

134. Si l'on suppose $\gamma=0$, ou que les parties du massif n'aient entre elles aucune cohésion, on a

$$\text{tang.}\,\theta=\frac{1}{f},\quad m=\frac{1}{f};$$

en sorte que le massif doit alors être coupé suivant l'angle du talus naturel.

Si l'on suppose $f=0$, ou que la force unissant les deux parties du massif soit indépendante de la pression, et seulement proportionnelle à l'étendue des surfaces en contact, on a

$$\text{tang.}\,\theta=\frac{\pi h}{4\gamma},\quad m=\frac{\pi^2h^2-16\gamma^2}{8\pi\gamma h}.$$

135. L'expression de h du n° 133, en nommant τ l'angle dont la tangente est $\frac{1}{f}$, peut s'écrire

$$h = \frac{4\gamma}{\pi . \text{tang.} \frac{1}{2}\tau},$$

d'où

$$\gamma = \frac{1}{4}\pi h . \text{tang.} \frac{1}{2}\tau.$$

Elle représente la plus grande hauteur sur laquelle la masse puisse être coupée verticalement, sans qu'il survienne d'éboulement. Si $\gamma = 0$, cette hauteur est nulle. Si $f = 0$, elle est égale à $\frac{4\gamma}{\pi}$.

La valeur du nombre f se connaît en observant le talus que prend la matière du massif, quand la cohésion a été rompue : f est la tangente de l'angle que ce talus fait avec l'horizon, et τ l'angle que ce talus fait avec la verticale. En observant ensuite la hauteur sur laquelle le massif peut être coupé verticalement, sans qu'il y ait éboulement, on connaîtra le poids γ au moyen de l'équation précédente.

136. Reprenant le calcul du n° 131, conservant les mêmes dénominations, et supposant la surface supérieure CD du massif (Fig. 15) chargée uniformément par des matières susceptibles de se diviser suivant des plans verticaux, correspondants aux extrémités supérieures T des plans de rupture; nommant p la pression qui en résulte sur l'unité superficielle du plan CD; on aura pour la force qui tend à opérer le glissement le long de AT

$$(ph + \tfrac{1}{2}\pi h^2)(\text{tang.}\,\theta - m)\cos.\theta;$$

pour celle qui tend à l'empêcher

$$f(ph + \tfrac{1}{2}\pi h^2)(\text{tang.}\,\theta - m)\sin.\theta + \gamma\frac{h}{\cos.\theta}.$$

En égalant ces deux quantités, il viendra

$$(\text{tang.}\,\theta - m)(1 - f\,\text{tang.}\,\theta) = \frac{2\gamma(1+\text{tang.}^2\theta)}{2p+\pi h};$$

et si l'on compare cette équation à celle du n° 131, on reconnaîtra que les formules trouvées dans le n° 132 s'appliqueront au cas dont il s'agit, en y écrivant $2p+\pi h$ à la place de πh.

ARTICLE II.

De l'équilibre d'un massif terminé par deux faces latérales, dont la surface supérieure est chargée d'un poids.

137. On considérera, pour plus de simplicité, un massif compris entre deux plans verticaux parallèles (Fig. 16). Supposant que le massif doit se rompre suivant la direction inclinée AT, on nommera

h la hauteur AC du massif;

a l'épaisseur AB ou CD;

α l'inclinaison sur l'horizon de la ligne de rupture AT;

P un poids réparti uniformément sur la surface supérieure CD, pour l'unité de longueur du massif;

π, f γ et auront les significations indiquées n° 131.

La force qui tend à produire le glissement de la partie supérieure du massif le long de AT est

$$\left(\text{P} + \pi a h - \frac{\pi a^2}{2}\,\text{tang.}\,\alpha\right)\sin.\,\alpha;$$

celle qui tend à empêcher ce glissement est

$$f\left(\text{P} + \pi a h - \frac{\pi a^2}{2}\,\text{tang.}\,\alpha\right)\cos.\,\alpha + \frac{\gamma a}{\cos.\,\alpha}.$$

Si l'on égale ces deux forces, on aura

$$\left(P+\pi ah-\frac{\pi a^2}{2}\text{tang.}\alpha\right)(\text{tang.}\alpha-f)=\gamma a(1+\text{tang.}^2\alpha),$$

d'où l'on déduit

$$P+\pi ah=\frac{\pi a^2}{2}\text{tang.}\alpha+\gamma a.\frac{1+\text{tang.}^2\alpha}{\text{tang.}\alpha-f}.$$

138. En faisant varier α, et déterminant la valeur minimum de $P+\pi ah$, on connaîtra en même temps la direction suivant laquelle le massif se romprait, si la charge surpassait un peu la valeur qui convient à l'équilibre, et la plus grande hauteur qu'il soit possible de donner à ce massif, ou le plus grand poids dont on puisse le charger.

La valeur de tang. α qui répond au minimum du second membre de l'équation précédente est

$$\text{tang.}\alpha=f+\sqrt{\frac{2\gamma(1+f^2)}{\pi a+2\gamma}};$$

et en la substituant dans ce second membre, on trouve

$$P+\pi ah=f\left(\frac{\pi a^2}{2}+2\gamma a\right)+\sqrt{2\gamma a(\pi a^2+2\gamma a)(1+f^2)}$$

pour l'expression de la plus grande valeur qu'il soit possible de donner à $P+\pi ah$, sans causer la rupture du massif.

139. Si l'on fait abstraction du poids de la partie supérieure ACDT du massif, ces formules deviennent

$$\text{tang.}\alpha=f+\sqrt{1+f^2},\quad P=2\gamma a(f+\sqrt{1+f^2}).$$

140. Si de plus on suppose $f=0$, ou que la résistance au glissement soit indépendante de la pression,

et proportionnelle à la surface de rupture, on a

$$\text{tang.}\,\alpha = 1, \quad P = 2\gamma a,$$

résultats donnés par Coulomb (*a*). La rupture tend alors à s'opérer suivant un plan incliné d'un demi-angle droit; la valeur de P est proportionnelle à l'épaisseur a du massif. Ces formules peuvent donner les lois de l'écrasement d'un prisme de pierre, par un effort exercé sur la face supérieure.

141. Les résultats précédents supposent la composition du massif homogène, comme le serait celle d'une masse de terre, de béton, ou de petits moellons posés irrégulièrement et unis avec du mortier. Dans ce dernier cas, on doit mettre dans les formules, pour f et γ, les valeurs qui conviennent à la matière du mortier. Mais si le massif est formé en pierres un peu grandes, taillées régulièrement, et posées par assises horizontales, la lézarde inclinée qui a lieu lors de la rupture, devra se former dans les pierres mêmes; et par conséquent les valeurs de f et γ devront être celles qui conviennent à la matière de ces pierres. On explique, par cette circonstance, l'excès de solidité que l'on obtient en employant le mode de construction dont il s'agit.

ARTICLE III.

De l'équilibre d'un massif exposé à un effort exercé contre une des faces latérales.

142. Considérons un massif ABDC (Fig. 17) compris entre deux faces parallèles, soumis à l'action d'une

(*a*) Mémoires des savants étrangers, 1773.

force horizontale appliquée en E. Cette force pourra rompre le massif, en faisant glisser la partie supérieure sur la partie inférieure, ou en renversant la première. Ces deux modes de rupture doivent être examinés à part.

Cas où la rupture du massif s'opère par glissement.

143. La ligne ET étant prise pour la direction du plan de rupture, on nommera

a l'épaisseur AB du massif;

P le poids de la partie supérieure CDEF du massif, pour l'unité de longueur;

α l'angle de ET avec l'horizontale EF;

Q la valeur de la force horizontale appliquée en E, pour l'unité de longueur du massif;

π, f et γ auront les significations indiquées n° 131.

La force qui tend à produire le glissement sur ET est

$$Q\cos.\alpha + \left(P + \frac{\pi a^2}{2}\tang.\alpha\right)\sin.\alpha;$$

la force qui s'y oppose est

$$f\left[-Q\sin.\alpha + \left(P + \frac{\pi a^2}{2}\tang.\alpha\right)\cos.\alpha\right] + \frac{\gamma a}{\cos.\alpha}.$$

En égalant ces deux forces et tirant la valeur de Q, il vient

$$Q = \frac{1}{2}.\frac{(2P + \pi a^2\tang.\alpha)(f - \tang.\alpha) + 2\gamma a(1 + \tang.^2\alpha)}{1 + f\tang.\alpha}.$$

144. En faisant varier α, et déterminant la valeur minimum de Q, on connaîtra en même temps la direction suivant laquelle le massif se romprait, si la

valeur de Q surpassait un peu celle qui convient à l'équilibre; et la plus grande valeur qu'il soit possible de donner à Q, sans causer la rupture du massif.

Posant pour abréger

$$A = 2fP + 2\gamma a,\quad B = f\pi a^2 - 2P,\quad C = \pi a^2 - 2\gamma a,$$

la valeur de tang. α qui rend l'expression précédente un minimum est

$$\text{tang.}\,\alpha = -\frac{1}{f} + \frac{1}{f}\sqrt{\frac{C + Bf - Af^2}{C}}.$$

145. Si l'on suppose la force de cohésion extrêmement grande, cette valeur se réduit à

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1+f^2}}{f};$$

c'est-à-dire, en appelant σ l'angle dont la tangente est f,

$$\text{tang.}\,\alpha = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\sigma.$$

La valeur correspondante de Q est

$$Q = 2\gamma a\,\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\sigma}{\text{tang.}\,\sigma}.$$

Lorsque γ diminue à partir de l'infini, α augmente et Q diminue. La valeur α devient infinie quand $\gamma = \frac{1}{2}\Pi a$, et la valeur correspondante de Q est zéro. Mais on ne peut pas supposer α plus grand que l'angle AEF : par conséquent quand la formule du n° 144 donnera pour α une valeur > AEF, il faudra faire α = AEF dans l'expression de Q du n° 143.

146. Si γ est $< \frac{1}{2}\Pi a$, il existera une valeur de α qui rendra nulle cette expression de Q. Cette valeur est

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2C}.$$

Si cette dernière formule donnait pour α une valeur $>$ AEF, il faudrait faire $\alpha =$ AEF dans l'expression de Q du n° 143. Dans le cas contraire, on conclura que le massif ne peut supporter aucune action horizontale.

Lorsque $\gamma = 0$, l'équation précédente se réduit à tang. $\alpha = f$, comme cela doit être.

147. Les résultats précédents supposent la composition du massif homogène. On peut les appliquer aux massifs construits en terre, en beton, ou en petits moellons posés irrégulièrement, en attribuant aux constantes f et γ les valeurs qui conviennent au mortier qui unit les matériaux.

A l'égard des massifs construits en grandes pierres taillées régulièrement et posées par assises réglées, il y a quelquefois certaines directions suivant lesquelles le massif peut se rompre plus facilement que suivant toute autre. Par exemple, si le massif est construit par assises horizontales, il doit se rompre dans le joint placé immédiatement au-dessous du point d'application E de la force Q. Dans ce cas l'équilibre exige que

$$Q = fP + \gamma a,$$

en mettant pour γ la valeur qui convient au mortier.

Si les pierres étaient disposées de manière qu'il n'y eût pas de joints continus dans les directions suivant lesquelles le glissement peut s'opérer, il faudrait examiner l'étendue de la surface des pierres qui doivent être rompues pour que le glissement ait lieu, et évaluer en conséquence la résistance due à la cohésion.

Cas où la rupture du massif s'opère par renversement.

148. Supposons maintenant que, le massif s'étant rompu suivant une direction inclinée AT (Fig. 18), la partie supérieure ACDT se renverse en tournant sur l'arête A. Conservant les dénominations du n° 143, et désignant de plus par

R la cohésion absolue de la matière du massif sur l'unité de surface, ou la force nécessaire pour séparer deux portions du massif, en tirant perpendiculairement au plan de rupture;

on aura, pour le moment de la force qui tend à faire renverser la partie supérieure,

$$QH.$$

Le moment des forces qui s'opposent à ce renversement est, en prenant pour le moment de la résistance à la rupture sur AT, une expression conforme à celle donnée par l'hypothèse de Mariotte (voyez n° 107),

$$\frac{P.a}{2}+\frac{\pi a^2 H}{2}-\frac{\pi a^3}{3}\text{tang.}\,\alpha+\frac{Ra^2}{3\cos.^2\alpha}.$$

En égalant ces deux moments, on a

$$QH=\frac{P.a}{2}+\frac{\pi a^2 H}{2}-\frac{\pi a^3}{3}\text{tang.}\,\alpha+\frac{Ra^2}{3}(1+\text{tang.}^2\alpha).$$

149. Si l'on cherche la valeur de tang. α qui rend le second membre un minimum, on connaîtra en même temps la direction suivant laquelle la rupture s'opérerait, si la valeur du moment QH surpassait un peu celle qui convient à l'équilibre, et la plus grande

valeur qu'il soit possible de donner à ce moment. La valeur de tang. α qui satisfait à cette condition est

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\pi a}{2R};$$

et en la substituant dans l'équation précédente, on a pour la limite cherchée

$$QH = \frac{P.a}{2} + \frac{\pi a^2 H}{2} - \frac{\pi^2 a^4}{12R} + \frac{R a^2}{3}.$$

En résolvant cette dernière équation par rapport à a, on connaîtra la moindre épaisseur qu'il soit possible de donner au mur, pour qu'il résiste à l'action de la force Q.

150. Si la force de cohésion est très-grande, on a sensiblement

$$\text{tang.}\,\alpha = 0, \quad QH = \frac{P.a}{2} + \frac{\pi a^2 H}{2} + \frac{R a^2}{3}.$$

La rupture s'opère alors sur la base AB. Il est supposé que le massif adhère à cette base avec la force exprimée par R.

151. A mesure que R diminue, α augmente, et la ligne de rupture s'écarte de plus en plus de AB. Mais cette ligne ne peut pas dépasser AE, car l'action de la force Q ne peut pas produire de disjonction dans la partie supérieure du massif. Par conséquent si l'expression de tang. α du n° 149 surpassait $\frac{H}{a}$; c'est-à-dire si l'on avait $R < \frac{\pi a^2}{2H}$; ce serait la valeur $\frac{H}{a}$ qui devrait être substituée à la place de tang. α dans l'équation d'équilibre. Cette équation donnerait alors

$$QH = \frac{P.a}{2} + \frac{\pi a^2 H}{6} + \frac{R}{3}(a^2 + H^2)$$

pour la limite des valeurs qui peuvent être attribuées au moment QH.

152. Si la force de cohésion R est supposée nulle, il s'ensuit que la rupture tend à se faire suivant la direction AE, et l'équation d'équilibre est

$$QH = \frac{P.a}{2} + \frac{\pi a^2 H}{6}.$$

Cette dernière supposition doit être adoptée le plus souvent dans les applications.

153. Si le massif n'adhère pas à sa base avec la même force que les parties du massif adhèrent entre elles, en sorte que la valeur de la force de cohésion dans le plan AB ait une valeur R' plus petite que R, on aura, en posant l'équation

$$QH = \frac{P.a}{2} + \frac{\pi a^2 H}{2} + \frac{R' a^2}{3},$$

une autre limite, que le moment QH ne pourrait dépasser sans causer le renversement du massif.

154. Si le massif est construit en pierres taillées régulièrement, et posées par assises horizontales, les résultats précédents peuvent être appliqués sans modification sensible, en attribuant à R la valeur qui convient à la matière du mortier qui unit les pierres.

Le mode de rupture dont il vient d'être question est celui qui a lieu le plus fréquemment, la rupture par glissement pouvant être facilement prévenue par divers procédés de construction, et exigeant généralement un effort plus considérable que ne le fait la rupture par renversement.

De la figure d'un massif d'égale résistance à la rupture par renversement.

155. On recherche la courbe BE (Fig. 19), suivant laquelle le massif doit être terminé en dessous, pour que la résistance à la rupture, suivant une direction quelconque AT tracée dans l'angle BAE, soit partout la même. On nommera

M le moment de la force Q, moins le moment de la portion ACDE du massif, ces moments étant pris par rapport au point A;
H la hauteur 6E du point d'application de la force Q;
c la longueur de la ligne AE;
A l'angle BAE;
α l'angle BAT;
ρ le rayon AT;
π et R auront les significations indiquées ci-dessus.

Considérant α et ρ comme des coordonnées auxquelles sont rapportés les points de la courbe BE, et nommant α' et ρ' les coordonnées d'un point quelconque T' situé au-delà de T, on aura

$$\tfrac{1}{3}\pi . d\alpha' . \cos. \alpha' . \rho'^3$$

pour le moment du poids d'un élément triangulaire de l'aire ATE. Par conséquent, supposant que la rupture s'effectue en AT, l'équation d'équilibre sera

$$M - \tfrac{1}{3}\pi \int_{\alpha}^{A} d\alpha' . \cos. \alpha' . \rho'^3 = \frac{R\rho^2}{3}.$$

Différenciant par rapport à α, on a

$$\pi d\alpha . \cos. \alpha . \rho^3 = 2R\rho d\rho,$$

d'où

$$\frac{\pi}{2R}\sin.\alpha = -\frac{1}{\rho} + const.;$$

ou, parce que quand $\alpha = A$, $\rho = c$,

$$\rho = \frac{2R.c}{2R + \pi(\sin.A - \sin.\alpha)c},$$

ou

$$\rho = \frac{2R.c}{2R + \pi(H - c\sin.\alpha)},$$

ce qui est l'équation de la courbe cherchée.

156. Si l'on suppose la cohésion extrêmement grande, cette équation se réduit à

$$\rho = c:$$

la courbe devient l'arc de cercle E*b* décrit du point A.

157. Lorsque l'on suppose la cohésion très-petite, la courbe se confond sensiblement avec la droite AE. Si, dans ce dernier cas, on avait donné au massif un profil rectangulaire, la partie AE*6* serait inutile à la solidité.

Les considérations précédentes trouvent principalement leur application dans l'établissement des contreforts employés dans les édifices du style dit Gothique.

ARTICLE IV.

De l'établissement des murs de revêtement, qui résistent à la poussée des terres et des eaux.

158. Cette question comporte deux parties : 1° la recherche de la pression que les terres exercent contre une paroi plane, par laquelle elles sont revêtues; 2° la

recherche des dimensions qu'il convient d'attribuer aux murs qui résistent à ces pressions.

Pression exercée par les terres contre une paroi plane.

159. AB (Fig. 20) étant une paroi plane, pressée par un massif de terre, et maintenue par une force Q perpendiculaire à cette paroi, on demande la valeur de la force Q, et le point E de la paroi auquel cette force doit être appliquée.

Supposant le massif susceptible de se diviser suivant une direction inclinée AT, on nommera

h la hauteur verticale AC du revêtement;
ε l'angle BAC, formé par la paroi avec la verticale;
θ l'angle BAT, formé par le plan de rupture avec la paroi;
τ l'angle CAF, formé avec la verticale par le plan sur lequel les terres se tiendraient en équilibre par l'effet seul du frottement; en sorte que $f = \frac{\cos.\tau}{\sin.\tau}$.

π, f et γ auront les significations indiquées n° 131.

La force qui tend à faire glisser le prisme BAT sur AT est

$$\frac{\pi h^2}{2}[\text{tang.}(\theta-\varepsilon)+\text{tang.}\varepsilon].\cos.(\theta-\varepsilon).$$

La force qui s'oppose à ce glissement est

$$Q\sin.\theta+fQ\cos.\theta+\frac{f\pi h^2}{2}[\text{tang.}(\theta-\varepsilon)+\text{tang.}\varepsilon]\sin(\theta-\varepsilon)+\frac{\gamma h}{\cos.(\theta-\varepsilon)}.$$

Égalant ces deux forces, et tirant la valeur de Q, on a

$$Q=\frac{\frac{\pi h^2}{2}[\text{tang.}(\theta-\varepsilon)+\text{tang.}\varepsilon][\cos.(\theta-\varepsilon)-f\sin.(\theta-\varepsilon)]-\frac{\gamma h}{\cos.(\theta-\varepsilon)}}{\sin.\theta+f\cos.\theta},$$

ou, en mettant pour f la valeur $\frac{\cos.\tau}{\sin.\tau}$,

$$Q=\frac{\pi h^2}{2}[\text{tang.}(\tau-\theta)+\text{tang.}\varepsilon][\text{tang.}(\theta-\varepsilon)+\text{tang.}\varepsilon]\cos.\varepsilon$$
$$-\frac{\gamma h\sin.\tau}{\cos.(\tau-\theta)\cos.(\theta-\varepsilon)}.$$

Si l'on cherche la valeur de θ qui rend le second membre un maximum, on connaîtra en même temps la direction suivant laquelle le massif se romprait si la force Q était un peu trop petite, et la moindre valeur qu'il soit possible de donner à cette force. Le maximum a lieu lorsque

$$\tau-\theta=\theta-\varepsilon, \quad \text{ou} \quad 2\theta=\tau+\varepsilon;$$

d'où il suit que la direction suivant laquelle le massif tend à se disjoindre partage en deux parties égales l'angle B A F compris entre la paroi et le talus naturel des terres lorsque la cohésion est rompue, et qu'elles se soutiennent par l'effet seul du frottement. Le prisme déterminé de cette manière se nomme *prisme de plus grande poussée* (*a*).

160. Substituant la valeur de θ dans celle de Q,

(*a*) Le principe d'après lequel on détermine le prisme de plus grande poussée, est dû à Coulomb (Mémoires des savants étrangers, 1773). Le théorème précédent a été donné par M. de Prony, pour le cas d'une paroi verticale (Recherches sur la poussée des terres, etc., 1802); et par M. Français, pour le cas d'une paroi inclinée (Mémorial de l'officier du génie, n° 4, 1820).

il vient

$$Q=\frac{\pi h^2}{2}[\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\tau-\varepsilon)+\text{tang.}\varepsilon]^2\cos.\varepsilon-\gamma h\frac{\sin.\tau}{\cos.^2\frac{1}{2}(\tau-\varepsilon)}$$

pour l'expression cherchée de la poussée des terres.

161. Si la paroi AB est inclinée du côté du massif (Fig. 21), l'angle ε doit être pris avec un signe contraire. Le prisme de plus grande poussée est déterminé par la condition

$$2\theta=\tau-\varepsilon;$$

la valeur de la poussée est

$$Q=\frac{\pi h^2}{2}[\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\tau+\varepsilon)-\text{tang.}\varepsilon]^2\cos.\varepsilon-\gamma h\frac{\sin.\tau}{\cos.^2\frac{1}{2}(\tau+\varepsilon)}.$$

162. Si la paroi AB est verticale, $\varepsilon=0$: on a, pour déterminer le prisme de plus grande poussée,

$$2\theta=\tau;$$

la valeur de la poussée est

$$Q=\frac{\pi h^2}{2}\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\tau-2\gamma h\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\tau.$$

163. Supposant pour abréger

$$t=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\tau\mp\varepsilon)\pm\text{tang.}\varepsilon,$$

et dans le cas où la paroi est verticale

$$t=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\tau,$$

en sorte que t représente toujours le rapport de la base BT du prisme de plus grande poussée à la hauteur AC; l'expression de la poussée devient

$$Q=\frac{\pi h^2}{2}t^2\cos.\varepsilon-\gamma h\frac{\sin.\tau}{\cos.^2\frac{1}{2}(\tau\mp\varepsilon)},$$

Digitized by Google

et dans le cas où la paroi est verticale,

$$Q = \frac{\pi h^2}{2} \cdot t^2 - 2\gamma h . t.$$

Cette expression est nulle quand $h = 0$; lorsque h augmente, elle est d'abord négative, puis redevient nulle quand h atteint une valeur que l'on nommera h', et qui est,

$$h' = \frac{2\gamma}{\pi} \cdot \frac{\sin.\tau}{t^2 \cos.^2 \frac{1}{2}(\tau \mp \varepsilon) \cos.\varepsilon};$$

et dans le cas où la paroi est verticale,

$$h' = \frac{4\gamma}{\pi . t}, \quad \text{d'où} \quad \gamma = \tfrac{1}{4} \pi h' . t.$$

Le massif peut donc se soutenir de lui-même sur la hauteur h', ce qui s'accorde avec le résultat du n° 135. Au-delà de cette valeur, Q croît indéfiniment avec h.

164. L'expression de Q peut être mise sous la forme

$$Q = \frac{\pi h}{2} t^2 (h - h') \cos.\varepsilon;$$

et dans le cas où la paroi est verticale,

$$Q = \frac{\pi h}{2} t^2 (h - h').$$

165. Pour connaître maintenant le point de la paroi où la force Q doit être appliquée, on remarquera que, sur une portion de la paroi correspondante à la portion z de la hauteur h, la poussée a pour expression

$$\frac{\pi z}{2} t^2 (z - h') \cos.\varepsilon.$$

Différenciant par rapport à z, il vient

$$\frac{\pi dz}{2} t^2 (2z - h') \cos.\varepsilon$$

pour la poussée exercée sur la portion de la paroi correspondante à la portion dz de la hauteur h. On aura le moment de cette poussée élémentaire, pris par rapport au point A (Fig. 20 et 21), en multipliant par $\frac{h-z}{\cos.\varepsilon}$. Prenant la somme des moments de ces poussées élémentaires, et la divisant par la poussée totale, on a

$$\frac{\int_0^h dz[-2z^2+(2h+h')z-hh']}{h(h-h')\cos.\varepsilon}=\frac{h}{3\cos.\varepsilon}\cdot\frac{h-\frac{3}{2}h'}{h-h'}$$

pour la distance du point d'application de la force Q au point inférieur A de la paroi (*a*). Quand la paroi est verticale, cette distance est

$$\tfrac{1}{3}h\cdot\frac{h-\frac{3}{2}h'}{h-h'}.$$

166. L'inclinaison du plan de rupture qui donne le prisme de plus grande poussée est indépendante de la valeur de la cohésion. Si l'on suppose la cohésion nulle, $h'=0$: la valeur de la poussée est

$$Q=\frac{\pi h^2}{2}\cdot t^2\cos.\varepsilon;$$

(*a*) Cette formule diffère de celle donnée par MM. de Prony et Français dans les Mémoires cités ci-dessus, ces savants ayant pris l'intégrale du moment de la poussée entre les limites h' et h. On remarquera que, quoique la somme des poussées élémentaires soit nulle sur la hauteur h', il ne s'ensuit pas que la somme des moments de ces poussées soit également nulle. Il paraît donc que l'intégrale doit être prise entre les limites 0 et h, comme l'a fait Coulomb dans son Mémoire de 1773. En opérant de cette manière, on fait disparaître l'anomalie remarquée par M. de Prony, n° 28 de ses Recherches sur la poussée des terres.

et quand la paroi est verticale,

$$Q = \frac{\pi h^2}{2} \cdot t^2.$$

La distance du point d'application de Q à l'extrémité inférieure de la paroi est

$$\frac{h}{3 \cos. \varepsilon};$$

et quand la paroi est verticale,

$$\tfrac{1}{3} h,$$

comme dans les fluides.

167. Si l'on suppose en même temps la force de cohésion et le frottement nuls, $h' = 0$, $\tau = 90°$,

$$t = \text{tang.}\,(45° \mp \tfrac{1}{2}\varepsilon) \pm \text{tang.}\,\varepsilon;$$

et quand la paroi est verticale,

$$t = 1.$$

La valeur de la poussée est dans ce dernier cas

$$Q = \frac{\pi h^2}{2},$$

conformément aux propriétés connues des fluides.

Pression exercée contre une paroi plane, lorsque la surface supérieure des terres est surchargée.

168. Reprenant le calcul du n° 159, en supposant la surface supérieure des terres chargée uniformément par des matières susceptibles de se diviser suivant des plans verticaux correspondants aux extrémités supé-

rieures T des lignes de rupture (Fig. 20 et 21), et nommant

p le poids porté par l'unité de surface,

on devra, dans les formules de ce n°, écrire $ph+\frac{1}{2}\pi h^2$ au lieu de $\frac{1}{2}\pi h^2$. L'angle du prisme de plus grande poussée demeurera toujours le même. La valeur de la poussée du n° 163 deviendra

$$Q=(ph+\tfrac{1}{2}\pi h^2)t^2.\cos.\varepsilon-\gamma h\frac{\sin.\tau}{\cos.^2\frac{1}{2}(\tau\mp\varepsilon)};$$

et dans le cas où la paroi est verticale,

$$Q=(ph+\tfrac{1}{2}\pi h^2)t^2-2\gamma h.t.$$

169. En appelant h'' la valeur de h pour laquelle Q est nulle, on aura

$$h''=h'-\frac{2p}{\pi};$$

les expressions de Q du n° 164, et l'expression trouvée n° 165 pour la distance du point d'application de Q à l'extrémité inférieure de la paroi, conviendront au cas dont il s'agit en écrivant h'' au lieu de h'.

170. En supposant nulle la cohésion des terres, comme au n° 166, la valeur de la poussée sera

$$Q=(ph+\tfrac{1}{2}\pi h^2)\,t^2\cos.\varepsilon;$$

et si la paroi est verticale,

$$Q=(ph+\tfrac{1}{2}\pi h^2)t^2.$$

La distance du point d'application de Q à l'extrémité inférieure de la paroi sera

$$\frac{h}{3\cos.\varepsilon}.\frac{\pi h+3p}{\pi h+2p};$$

et si la paroi est verticale,

$$\frac{1}{3}h.\frac{\pi h+3p}{\pi h+2p}.$$

171. Lorsque les terres se changent en un fluide, les expressions précédentes de Q s'appliquent à ce cas en supposant $\tau=90^\circ$, ce qui donne $t=1$ quand la paroi est verticale. La valeur précédente de la distance du point d'application de la pression convient également aux terres non cohérentes, et aux fluides.

Équilibre d'un mur soutenant la poussée des terres.

172. On regarde le mur AB ba (Fig. 22 et 23) comme étant susceptible de se rompre suivant la direction inclinée aS. La rupture peut avoir lieu, soit parce que la partie supérieure SB ba glisserait sur le plan de rupture, soit parce que cette partie supérieure serait renversée en tournant sur l'arête a. La rupture par glissement, suivant une direction inclinée tracée dans l'épaisseur du mur, peut être prévenue par divers procédés de construction; et, abstraction faite de ces procédés, ce genre de rupture n'aura pas lieu, en général, si le mur a l'épaisseur nécessaire pour résister à la rupture par renversement. On considérera seulement ici ce dernier genre de rupture.

Conservant les dénominations des nos 159 et suivants, on nommera

a la largeur Aa de la base du mur;

h la hauteur verticale AC;

m le rapport de la base à la hauteur, pour le talus de la face extérieure ab du mur;

Π le poids de l'unité de volume de la matière du mur;

R la cohésion de la matière du mur sur l'unité superficielle (voyez n° 148);

ε représentera, comme ci-dessus, l'angle que le parement intérieur AB forme avec la verticale;

z la hauteur indéterminée SD.

En regardant la pression exercée par la terre contre BS comme une force appliquée en E, perpendiculairement au parement du mur, la valeur de cette force, d'après le n° 164, est

$$\tfrac{1}{2}\pi z t^2 (z - h')\cos.\varepsilon.$$

La distance SE, d'après le n° 165, est

$$\frac{z}{3\cos.\varepsilon}\cdot\frac{z-\frac{3}{2}h'}{z-h'};$$

d'où il suit que le bras de levier aG de la force dont il s'agit, est

$$(h-z)\cos.\varepsilon + \frac{z}{3\cos.\varepsilon}\cdot\frac{z-\frac{3}{2}h'}{z-h'} \mp a\sin.\varepsilon.$$

L'expression du moment de la poussée des terres sur BS, pris par rapport à l'arête a, est donc

$$\tfrac{1}{2}\pi z t^2(z-h')\cos.\varepsilon\left[(h-z)\cos.\varepsilon + \frac{z}{3\cos.\varepsilon}\cdot\frac{z-\frac{3}{2}h'}{z-h'} \mp a\sin.\varepsilon\right],$$

les signes supérieur et inférieur ayant lieu respectivement pour les cas des figures 22 et 23. La même expression conviendrait au cas où la surface supérieure des terres serait surchargée uniformément, en écrivant h'' au lieu de h', conformément au n° 169.

173. Le moment des forces qui s'opposent au renver-

sement, pris par rapport à l'arête A, se compose du moment du poids du rectangle A C ca, qui est

$$\tfrac{1}{2}\Pi a^2 h;$$

moins le moment du poids du triangle abc,

$$\tfrac{1}{6}\Pi m^2 h^3;$$

moins ou plus le moment du poids du triangle A C B,

$$\tfrac{1}{2}\Pi h^2 \text{tang.}\,\varepsilon\,(a \mp \tfrac{1}{3} h \,\text{tang.}\,\varepsilon);$$

moins le moment du poids du triangle a R S

$$\tfrac{1}{3}\Pi(h-z)[a \mp (h-z)\,\text{tang.}\,\varepsilon]^2;$$

moins ou plus le moment du poids du triangle A R S,

$$\tfrac{1}{2}\Pi(h-z)^2 \text{tang.}\,\varepsilon\,[a \mp \tfrac{2}{3}(h-z)\,\text{tang.}\,\varepsilon];$$

auxquels il faut ajouter le moment de la résistance à la rupture sur a S, qui est

$$\tfrac{1}{3}\text{R}\,\{(h-z)^2 + [a \mp (h-z)\,\text{tang.}\,\varepsilon]^2\}.$$

Nous négligeons ici la considération du frottement et de l'adhérence des terres, contre le parement intérieur du mur.

174. La condition de l'équilibre du mur, pour une valeur donnée de z, s'exprimera en égalant cette somme de moments au moment de la poussée des terres sur B S. Si l'on résout ensuite l'équation par rapport à a, et si l'on détermine la valeur de z par la condition de rendre a un maximum, on connaîtra en même temps la direction suivant laquelle le mur se romprait, si l'épaisseur a était un peu trop petite, et la moindre valeur qu'il soit possible de donner à cette épaisseur.

175. Nous supposerons le parement intérieur du mur vertical, la cohésion des terres et celle de la matière du mur nulles, d'où $\varepsilon = 0$, $h' = 0$, $R = 0$. Dans ce cas, s'il n'y a point de surcharge sur la surface supérieure des terres, le moment de la poussée sur BS, pris par rapport au point A, est

$$\tfrac{1}{2}\pi z^2 . t^2 (h - \tfrac{2}{3} z);$$

et le moment de stabilité du mur,

$$\tfrac{1}{2}\Pi a^2 h - \tfrac{1}{3}\Pi a^2 (h - z) - \tfrac{1}{6}\Pi m^2 h^3.$$

En égalant ces deux quantités, et résolvant par rapport à a, on trouve

$$a = \sqrt{\frac{\pi z^2 t^2 (3h - 2z) + \Pi m^2 h^3}{\Pi (h + 2z)}}.$$

Différentiant et égalant à zéro, on aura, pour déterminer la valeur de z qui rendra a le plus grand possible, l'équation

$$8\pi t^2 . \Pi z^3 - 6\pi t^2 . \Pi h^2 z + 2\Pi^2 m^2 h^3 = 0.$$

Cette valeur, substituée dans l'expression précédente, fera connaître la moindre largeur qu'il soit possible de donner à la base du mur.

176. Si le parement extérieur du mur est vertical, aussi-bien que le parement intérieur, $m = 0$; l'expression précédente de a se réduit à

$$a = \sqrt{\frac{\pi z^2 t^2 (3h - 2z)}{\Pi (h + 2z)}}.$$

La valeur de z qui rend cette expression un maximum, est

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} . h;$$

et la moindre épaisseur qu'il soit possible de donner au mur, est

$$a = h.t\sqrt{\frac{9\pi}{(12+8\sqrt{3})\Pi}}.$$

Ainsi la hauteur RS est alors le $\frac{1}{8}$ environ de la hauteur du mur, et la moindre épaisseur est à peu près $0{,}59.\,ht\sqrt{\frac{\pi}{\Pi}}$.

Équilibre d'un mur soutenant la poussée des terres, en supposant ce mur renversé en totalité sur l'arête extérieure de la base.

177. On regarde maintenant le mur comme un corps posé sur une base avec laquelle il n'aurait aucune adhérence, en supposant l'adhérence de la matière de ce mur assez grande pour qu'il ne s'y fasse pas de disjonction, dans le cas où la poussée des terres le renverserait en le faisant tourner sur l'arête extérieure de la base. En conservant les dénominations du n° 172, qui se rapportent aux fig. 22 et 23, l'expression du moment de la poussée des terres sur AB se déduira de celle trouvée dans ce numéro en supposant $z = h$, et sera

$$\tfrac{1}{2}\pi t^2\left[\tfrac{1}{3}h^2(h-\tfrac{3}{2}h') \mp ah(h-h')\sin.\varepsilon\cos.\varepsilon\right].$$

Le moment des forces qui s'opposent au renversement se déduira également de l'expression donnée n° 173, en supposant $z = h$, $R = 0$, et sera

$$\tfrac{1}{3}\Pi h\left[a^2 \mp ah\,\text{tang.}\,\varepsilon + \tfrac{1}{3}h^2(\text{tang.}^2\varepsilon - m^2)\right].$$

Égalant ces deux expressions, et résolvant l'équation

par rapport à a, on trouvera

$$a = \pm \tfrac{1}{2}\left[h \operatorname{tang.}\varepsilon - \frac{\pi}{\Pi} t^2 (h - h') \sin.\varepsilon \cos.\varepsilon\right]$$
$$+ \sqrt{\left\{\tfrac{1}{4}\left[h \operatorname{tang.}\varepsilon - \frac{\pi}{\Pi} t^2 (h - h') \sin.\varepsilon \cos.\varepsilon\right]^2 + \frac{\pi}{3\Pi} t^2 . h(h - \tfrac{3}{2} h') - \tfrac{1}{3} h^2 (\operatorname{tang.}^2 \varepsilon - m^2)\right\}}$$

pour l'expression de la largeur à donner à la base du mur.

Cette expression conviendra au cas où la surface supérieure des terres est surchargée, en écrivant h'' au lieu de h', et donnant à h'' la valeur indiquée n° 169.

178. Si le parement intérieur du mur est vertical, $\varepsilon = 0$; la valeur de a est

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{3\Pi} t^2 h(h - \tfrac{3}{2} h') + \tfrac{1}{3} m^2 h^2},$$

formule dans laquelle $t = \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} \tau$, conformément au n° 163.

179. Si le parement extérieur du mur est également vertical, $m = 0$, et l'on a

$$a = t \sqrt{\frac{\pi}{3\Pi} \cdot h(h - \tfrac{3}{2} h')}.$$

180. Si, la cohésion des terres étant supposée nulle, il existe une surcharge sur la face supérieure, on doit (conformément au n° 169) écrire $-\frac{2p}{\pi}$ au lieu de h' dans l'expression générale de a du n° 177, et dans celles des deux n^os^ précédents. Mais s'il n'existe point de surcharge, on doit faire $h' = 0$. L'expression du n° 177

devient alors

$$a = \pm \tfrac{1}{2} h \left[\text{tang.}\,\varepsilon - \frac{\pi}{\Pi} t^2 \sin.\varepsilon \cos.\varepsilon\right]$$
$$+ h \sqrt{\tfrac{1}{4}\left[\text{tang.}\,\varepsilon - \frac{\pi}{\Pi} t^2 \sin.\varepsilon \cos.\varepsilon\right]^2 + \frac{\pi}{3\Pi} t^2 - \tfrac{1}{3}(\text{tang.}^2\varepsilon - m^2)}.$$

181. Si, la cohésion des terres étant nulle, le parement intérieur du mur est vertical, on a

$$a = h \sqrt{\frac{\pi}{3\Pi} t^2 + \tfrac{1}{3} m^2}.$$

182. Enfin si, la cohésion des terres étant nulle, les deux parements du mur sont verticaux, on a

$$a = h.t \sqrt{\frac{\pi}{3\Pi}};$$

en sorte que la moindre épaisseur à donner au mur est à peu près $0,577.ht\sqrt{\frac{\pi}{\Pi}}$, résultat qui ne diffère pas sensiblement de celui du n° 176.

183. Les formules des trois nos précédents s'appliqueront au cas où les terres se changent en un fluide, en supposant $\tau = 90°$, ce qui donne $t = 1$ quand le parement intérieur du mur est vertical.

Équilibre d'un mur soutenant la poussée des terres, en supposant que ce mur peut glisser sur la fondation.

184. On peut encore regarder le mur comme un corps posé sur une base horizontale, avec laquelle il aurait une faible adhérence, et sur laquelle la poussée des terres le ferait glisser, sans opérer de disjonction dans ce mur. Conservant les dénominations du n° 172,

qui se rapportent au fig. 22 et 23, on nommera

F le rapport du frottement à la pression lorsque le mur glisse sur la base Aa;

Γ la force de cohésion existant entre la matière du mur et la base.

La force qui tend à produire le glissement est la composante horizontale de la poussée Q, dont la valeur a été donnée n° 164, c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{2}\pi h t^2 (h - h') \cos.^2 \varepsilon.$$

Le poids du mur étant

$$\Pi[ah - \tfrac{1}{2} h^2 (m \pm \text{tang.}\varepsilon)],$$

on a pour la force qui s'oppose au glissement

$$\pm \tfrac{1}{2} \text{F} \pi h t^2 (h - h') \sin.\varepsilon \cos.\varepsilon$$
$$+ \text{F}\Pi[ah - \tfrac{1}{2} h^2 (m \pm \text{tang.}\varepsilon)] + \Gamma a.$$

En égalant ces deux forces, on exprime la condition de l'équilibre du système, et en résolvant l'équation par rapport à a, on trouve

$$a = \frac{h}{2} \cdot \frac{\pi t^2 (h - h') \cos.^2 \varepsilon (1 \mp \text{F tang.}\varepsilon) + \text{F}\Pi h (m \pm \text{tang.}\varepsilon)}{\text{F}\Pi h + \Gamma}$$

pour l'expression de la moindre largeur qu'il soit possible de donner à la base du mur.

Cette expression conviendra au cas où la surface supérieure des terres est surchargée, en écrivant h'' au lieu de h', et donnant à h'' la valeur indiquée n° 169.

185. Si le parement intérieur du mur est vertical, $\varepsilon = 0$: la valeur de a est

$$a = \frac{h}{2} \cdot \frac{\pi t^2 (h - h') + \text{F}\Pi m h}{\text{F}\Pi h + \Gamma},$$

formule dans laquelle $t = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\tau$, conformément au n° 163.

186. Si le parement extérieur du mur est également vertical, $m = 0$, et l'on a

$$a = \frac{h}{2} \cdot \frac{\pi t^2 (h - h')}{\text{F}\Pi h + \Gamma}.$$

187. Si, la cohésion des terres étant supposée nulle, il existe une surcharge sur la face supérieure, on doit, conformément au n° 169, écrire $-\frac{2p}{\pi}$ au lieu de h' dans les deux expressions précédentes. Mais s'il n'existe point de surcharge, on doit alors faire $h' = 0$. En supposant également nulle la cohésion entre le mur et la base, l'expression du n° 184 devient

$$a = \frac{h}{2}\left[\frac{\pi}{\text{F}\Pi} t^2 \cos.^2 \varepsilon (1 \mp \text{F tang.}\,\varepsilon) + m \pm \text{tang.}\,\varepsilon\right].$$

188. Si, la cohésion étant nulle, le parement intérieur du mur est vertical, on a

$$a = \frac{h}{2}\left[\frac{\pi}{\text{F}\Pi} t^2 + m\right].$$

189. Enfin si, la cohésion étant nulle, les deux parements sont verticaux,

$$a = \frac{\pi h . t^2}{2\,\text{F}\Pi}.$$

190. Les formules des trois numéros précédents s'appliqueront au cas où les terres se changent en un fluide, en supposant $\tau = 90°$, ce qui donne $t = 1$ quand le parement intérieur du mur est vertical.

Tous les résultats exposés depuis le n° 172 s'appli-

quent également à un mur formé d'un massif homogène, ou à un mur construit avec des pierres posées par assises horizontales.

ARTICLE V.

De l'établissement des fondations, lorsque les murs sont supportés par des terrains compressibles.

191. Quand on n'a pu établir les fondations d'un mur sur un sol sensiblement incompressible, l'inconvénient qui en résulte est moindre si le mur, par l'effet de la compressibilité du terrain, s'abaisse verticalement, sans pencher d'un côté ou de l'autre. La fondation doit donc être disposée de manière que le mur n'ait aucune tendance à se déverser. Nous supposons le terrain également compressible, dans toute l'étendue de la surface des fondations.

Dans le cas où le mur ne supporte que des actions verticales, la condition dont il s'agit sera remplie si le centre de gravité du poids du mur, et des poids dont il est chargé, se trouve dans la ligne verticale passant par le centre de gravité de l'aire des fondations.

192. En général, si un mur supporte des efforts verticaux et horizontaux, il n'aura aucune tendance à se déverser, si la résultante de ces efforts passe par le centre de gravité de l'aire des fondations; c'est-à-dire si la somme des moments de ces efforts, pris par rapport à ce centre de gravité, est nulle (*a*).

(*a*) Cette considération a été présentée dans un Mémoire rédigé en 1816, et publié en 1822 par M. Lambel, directeur des fortifications. Elle l'est également dans le Mémoire de M. Français, Mémorial du génie, n° 4.

193. Par exemple, dans le mur représenté fig. 17 et 18, dont les conditions d'équilibre ont été examinées dans les nos 143 et suivants, supposant le profil des fondations rectangulaire, conservant les dénominations de ces numéros, et appelant

a' la largeur $\alpha\beta$ de la fondation;
h' la hauteur $B\beta$;

on aura pour le moment du poids du mur et de la fondation, pris par rapport au milieu de la base $\alpha\beta$,

$$\tfrac{1}{2}(P+\pi ah)(a'-a);$$

et pour le moment de la force horizontale Q, pris par rapport au même point,

$$Q(h+h').$$

La largeur a' devra donc être déterminée par l'équation

$$Q(h+h')=\tfrac{1}{2}(P+\pi ah)(a'-a),$$

d'où

$$a'=a+\frac{2Q(h+h')}{P+\pi ah}.$$

194. Dans tout autre cas, et particulièrement dans le cas des murs soutenant la poussée des terres ou des fluides, on ne trouvera aucune difficulté pour régler la largeur des fondations de manière à satisfaire à la condition dont il s'agit, puisque les résultats présentés dans l'article précédent font connaître la grandeur et la direction de la poussée. On fera en sorte que le moment de cette poussée, pris par rapport au milieu de la base des fondations, soit égal au moment du poids du mur, pris par rapport au même point.

ARTICLE VI.

Qualités diverses des terres. Évaluation de la pesanteur spécifique, du frottement et de la cohésion.

195. Les propriétés des terres, dont la nature et les qualités sont très variables, peuvent être considérées sous divers points de vue. On distinguera ici, 1° les terres déblayées, et réduites en petites parties qui n'adhèrent pas sensiblement les unes aux autres; 2° les terres dans l'état naturel, en les supposant sèches, ou légèrement humectées; 3° les terres fortement pénétrées par l'eau.

La pesanteur spécifique des terres et des maçonneries ne peut être connue exactement que par des expériences spéciales. Le tableau suivant offre des résultats moyens.

Terre végétale	1,4
Terre franche	1,5
Terre argileuse	1,6
Glaise	1,9
Sable terreux	1,7
Sable pur	1,9
Maçonnerie de moellon en pierres calcaires et siliceuses, depuis	1,7
jusqu'à	2,3
Maçonnerie de moellon en granit	2,3
Maçonnerie de moellon en basalte	2,5

Ces nombres étant multipliés par 1000, donneront le poids du mètre cube en kilogrammes

Des terres déblayées, et réduites en petites parties non cohérentes.

196. Dans cet état, les parties des terres sont regardées comme n'ayant aucune cohésion les unes avec les autres. On doit donc, en appliquant les formules des articles précédents, supposer la cohésion nulle. Il reste à connaître le rapport du frottement à la pression, ou, ce qui est la même chose, le talus qu'affectent naturellement ces terres, lorsque l'on en forme un remblai (voyez nos 135 et 159).

197. Le sable fin et sec est, de toutes les terres, celle qui prend le plus grand talus. D'après une expérience de M. Gadroy (*a*), ce talus est $\frac{5}{3}$; d'où $f=0,6$ et $\tau=69°$.

198. D'après les expériences de M. Rondelet (*b*), le plan du talus du sable fin bien sec, et du grès pulvérisé, forme avec l'horizon un angle de $34° \frac{1}{3}$; d'où $f=0,69$ et $\tau=55° \frac{1}{2}$.

D'après les mêmes expériences (*c*), le plan du talus, pour la terre ordinaire, bien sèche et pulvérisée, forme avec l'horizon un angle qui est au moins 46° 50'; d'où $f=0,94$ et $\tau=43° 10'$. Quand la même terre est légèrement humectée, cet angle devient au plus 54°; ce qui donne $f=1,38$ et $\tau=36°$.

199. D'après M. Barlow (*d*), le talus de la plus légère

(*a*) Traité expérimental et analytique de la poussée des terres, par M. Mayniel, page 1.

(*b*) Art de bâtir, tome III, page 135.

(*c*) *Idem*, page 139, 141.

(*d*) *An Essay on the strength and stress of timber*, page 249.

espèce de sable est $\frac{5}{4}$; d'où $f=0,8$ et $\tau=51°$. D'après le même auteur, le talus du sol de l'espèce la plus dense et la plus compacte est $\frac{5}{7}$; d'où $f=1,4$ et $\tau=35°$.

200. D'après le colonel Pasley (*a*), l'espèce de terre non cohérente (*loose shingle*) et parfaitement sèche, employée à ses expériences, prenait un talus de $\frac{6,25}{5}$; d'où $f=0,8$ et $\tau=51°$.

Des terres dans l'état naturel.

201. La plupart des terres, et même les sables, ont acquis une cohésion assez grande, lorsque les parties ont demeuré long-temps en contact, et ont été fortement comprimées. Dans cet état on peut les couper verticalement, sans causer d'éboulement, sur une hauteur de 1 à 2^m pour la terre franche, et de 3 à 4^m, ou même davantage, pour les terres fortement argileuses. On ne connaît point à ce sujet d'observations précises. La force d'adhésion de la même terre peut varier d'ailleurs avec le degré d'humidité.

(*a*) *Course of military instruction*, tome III, page 562. Cet ouvrage contient une suite d'expériences sur l'action de la terre contre les revêtements. On remarquera que des expériences en petit ne sont point propres à donner des notions exactes sur cette action, dont les divers éléments varient suivant des proportions différentes avec les hauteurs des revêtements. Aucun des résultats obtenus par l'auteur n'est d'ailleurs en contradiction avec les notions présentées dans les articles précédents. Ces résultats indiquent seulement que le frottement et l'adhérence des terres contre le parement intérieur des murs, dont la considération a été négligée dans les calculs des nos 172 et suivants, produisent des effets sensibles quand la hauteur des revêtements est très-petite, comme elle l'était dans ces expériences. Les expériences décrites par M. Mayniel, dans ses Recherches sur la poussée des terres, peuvent donner lieu à des remarques semblables.

La valeur du coëfficient γ (voyez n° 131) se conclut de la hauteur sur laquelle la terre peut être coupée verticalement sans s'ébouler, par la formule donnée nos 135 et 163,

$$\gamma = \tfrac{1}{4}\pi h'.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\tau,$$

h' étant la hauteur dont il s'agit, π le poids de l'unité de volume des terres, τ l'angle que forme avec la verticale le plan du talus naturel, la cohésion étant supposée détruite.

En supposant pour la terre franche $\pi = 1500^k$, $\tau = 40°$, $h' = 1^m$, on trouve $\gamma = 136^k$.

En supposant pour les terres les plus fortes $\pi = 1800^k$, $\tau = 35°$, $h' = 4^m$, on trouve $\gamma = 568^k$.

La valeur du coëfficient γ peut être regardée pour les terres comme étant comprise entre ces deux limites; le mètre et le kilogramme étant les unités de longueur et de poids.

202. Lorsque des terres, dans l'état naturel, ont été coupées, et que la surface du talus demeure exposée à l'air, les alternatives de sécheresse et d'humidité, ou l'effet de la gelée, changent les qualités de ces terres. Les parties voisines de la surface se détachent successivement; et, en général, les terres tendent à prendre d'elles-mêmes, avec le temps, les talus qu'elles auraient affecté d'abord, si la cohésion n'eût pas existé. Mais si la paroi latérale a été revêtue par une construction en maçonnerie, l'altération dont il s'agit n'a pas lieu; et les terres peuvent alors se soutenir sur des talus moindres, ou avec des revêtements moins épais, qu'elles ne l'eussent fait si la cohésion des parties eût été préliminairement détruite.

Des effets de l'eau pénétrant dans les terres.

203. Le sable, la terre végétale et la terre franche, pénétrés par l'humidité, ne paraissent pas subir d'altération notable. Les terres vaseuses, et celles dites savonneuses, se délaient et deviennent susceptibles de couler presque comme le ferait un fluide. La poussée des terres de cette espèce doit être calculée par les formules qui conviennent au cas des fluides, en attribuant au poids de l'unité de volume la valeur convenable. Les terrains argileux, et principalement la glaise pure, sans devenir coulants, ce qui exigerait qu'ils absorbassent une très-grande quantité d'eau, augmentent de volume lorsque l'humidité les pénètre. Un terrain homogène augmentant de volume, agit contre un revêtement de la même manière que le ferait un fluide d'une pesanteur spécifique égale à celle de ce terrain. Aussi, quoique les terrains glaiseux, secs ou légèrement humides, aient une grande cohésion et paraissent exiger des revêtements peu épais; ces terrains deviennent cependant, à raison de leur grande pesanteur spécifique, les plus dangereux de tous, lorsqu'ils sont dans le cas d'être pénétrés par les eaux.

Des cas où la nature du terrain varie dans la hauteur du revêtement.

204. Les terrains offrent souvent des couches de diverses natures. On pourrait prendre en considération ces variations dans les calculs. La complication qui en résulterait, et les incertitudes qui restent sur l'évaluation des éléments de la résistance des terrains de diverses espèces, s'opposent à ce que ces recherches

puissent, quant à présent, être bien utiles. On remarquera seulement, 1° que l'on sera toujours au-dessus de l'équilibre, en attribuant à toute la masse les moindres valeurs du frottement et de la cohésion qui conviennent aux diverses couches; 2° qu'il n'existe aucun cas où l'action des terres puisse surpasser celle d'un fluide ayant la même pesanteur spécifique.

Du frottement et de la cohésion dans les maçonneries.

205. D'après les expériences de M. Rondelet (*a*), une pierre de liais (calcaire d'un grain très-fin), bien écarrie et dressée au grès, glissant sur une pierre semblable, se soutient en équilibre sur un plan incliné d'un peu plus de 30°. On en déduit, pour le rapport du frottement à la pression, 0,58.

206. D'après les expériences de M. Boistard (*b*), le rapport du frottement à la pression pour une pierre calcaire très-dure, dont la surface est piquée ou bouchardée, est moyennement 0,78.

207. D'après l'observation de M. Regnier (*c*), le même rapport, pour une caisse en bois glissant sur du pavé, est 0,58.

208. Le tableau suivant contient les résultats des expériences faites par M. Boistard (*d*), sur la force de

(*a*) Traité de l'Art de bâtir, tome III, page 243.

(*b*) Recueil d'expériences et d'observations faites sur différents travaux, etc., page 132, édition de 1822.

(*c*) Description du dynamomètre, Journal de l'École Polytechnique, 5e cahier, page 171.

(*d*) Recueil d'expériences et d'observations faites sur différents travaux, etc., page 125.

cohésion qu'offrent les mortiers, lorsque l'on entreprend de séparer deux portions en les faisant glisser l'une sur l'autre. Des prismes ayant 5 po. de hauteur, formés en pierre calcaire bouchardée sur la base, sans ciselure au pourtour, ont été fichés sur une dalle en pierre semblable; les uns avec du mortier composé de $\frac{1}{3}$ de chaux éteinte depuis dix-huit mois, et de $\frac{2}{3}$ de sable de carrière passé au crible et assez sec; les autres avec du mortier composé de $\frac{1}{3}$ de la même chaux, et de $\frac{2}{3}$ de ciment. Ces prismes, conservés à couvert, ont été détachés au bout de 16 jours, au moyen d'une corde dirigée parallèlement à la surface de rupture à 9 ou 10 lignes au-dessus de la dalle, passant sur une poulie, et dont l'extrémité était chargée de poids.

Surface des bases des prismes.	Poids des prismes.	Poids qui ont détaché les prismes fichés en mortier de	
		chaux et sable.	chaux et ciment.
pouces quarrés.	livres.	livres.	livres.
16	8	159	60*
16	8,37	148	110
32	16,25	340	165*
32	16,12	333	115*
48	24	541	333
48	24,67	580	165*
64	33,75	920	465
64	33,12	300*	549

Les résultats marqués * doivent être rejetés, ou sont incertains.

Le tableau suivant contient une autre suite d'expériences faites sur les mêmes prismes, fichés de nouveau et détachés après 18 jours (*a*).

Surface des bases des prismes.	Poids des prismes.	Poids qui ont détaché les prismes fichés en mortier de	
		chaux et sable.	chaux et ciment.
pouces quarrés.	livres.	livres.	livres.
16	8,25	115	52
16	8,25	52	87
32	16,12	350	130
32	16,25	416	203
48	24,37	790	377
48	24,25	794	394
64	33,50	852	515
64	33,37	865	502

D'après ces expériences la force de cohésion du mortier est proportionnelle à la surface, et peut être estimée au moins à 1500 livres par pied quarré, pour le mortier de chaux et sable, et 800 livres pour le mortier de chaux et ciment (6960^k et 3700^k par mètre quarré). Après le premier mois l'adhérence est presque aussi grande qu'après plusieurs années. Après un an, l'adhérence du mortier de ciment, séché à l'air, est moitié moindre que celle du mortier de sable.

(*a*) *Idem*, page 129. Dans l'édition citée, il est dit que ces prismes ont été détachés après dix-huit *mois*. Il paraît que c'est une faute d'impression : la première édition des Expériences sur la main-d'œuvre, de M. Boistard, publiée en 1804, et son Mémoire sur les voûtes, inséré dans la IIe partie du Recueil publié par M. Lesage, en 1810, indiquent dix-huit jours, ainsi que les copies manuscrites de ce Mémoire.

209. D'après d'autres expériences du même auteur (*a*), deux prismes de 64 pouces quarrés, pesant 33 livres, ont été fichés, l'un en mortier de sable et l'autre en mortier de ciment, plongés immédiatement sous l'eau, et détachés au bout de seize mois. Le mortier du premier était mou comme au moment de l'emploi, et la force de cohésion a été de 115 livres. Le mortier du second était très-dur, et un effort de 1000 livres n'a pu le détacher (*b*).

Ces résultats serviront à apprécier les valeurs du coëfficient représenté par γ dans les n°s 131 et suivants, lorsqu'il s'agira d'une rupture opérée dans les joints d'un massif en maçonnerie. On ne connaît point d'expériences directes pour l'évaluation du même coëfficient, lorsque la rupture doit s'opérer dans la pierre. Le coëfficient représenté par R, dans les n°s 148 et suivants, peut s'évaluer au moyen des résultats rapportés n°s 22 et 23.

(*a*) *Idem*, page 131.

(*b*) En rapprochant ces résultats de ceux rapportés n°s 22 et 23, il paraîtrait que la force de cohésion du mortier est beaucoup moindre lorsque la force est exercée parallèlement au plan de rupture, qu'elle n'est lorsque la force est exercée perpendiculairement à ce plan. Il serait nécessaire toutefois, pour fixer les idées à cet égard, que des expériences comparatives eussent été faites sur les mêmes mortiers.

En donnant à γ les valeurs indiquées n° 208, et calculant le poids nécessaire pour écraser un cube de 0^m, 05 de côté, par les formules des n°s 139 et 140, on trouve un résultat fort inférieur à ceux rapportés n° 9. Peut-être peut-on attribuer en partie cette différence à la présence des grains de sable ou de ciment, beaucoup plus durs que la matière qui les unit.

TROISIÈME SECTION.

DE L'ÉQUILIBRE ET DE L'ÉTABLISSEMENT DES VOUTES.

210. Il existe plusieurs espèces de voûtes, dont les principales sont les voûtes en berceau, les voûtes d'arête, les voûtes en arc de cloître, les voûtes en dôme. On s'occupera principalement ici des voûtes en berceau.

Une voûte est un assemblage de parties solides juxtaposées. Ces parties, nommées *voussoirs*, sont séparées par des *joints*. Dans les voûtes construites en pierre, les joints des voussoirs sont ordinairement garnis en mortier. Lorsque les efforts exercés sur chaque voussoir, et la figure de la voûte, sont tels que le système ne se trouve point en équilibre, cette voûte se rompt. La rupture peut avoir lieu, soit parce que les parties de la voûte se séparent en glissant les unes sur les autres, soit parce que ces parties s'écartent en tournant autour des arêtes supérieures ou inférieures des voussoirs. Le frottement et l'adhérence des mortiers s'opposent à ces mouvements, et contribuent à maintenir la voûte en équilibre.

ARTICLE PREMIER.

Conditions générales de l'équilibre d'un assemblage de voussoirs.

211. Soit un assemblage de voussoirs ABNM (fig. 24), formant une portion de voûte en berceau, appuyé en AB contre un plan fixe, et maintenu à l'autre extrémité par une force dont les composantes verticale et

horizontale sont P, Q. La figure de cet assemblage de voussoirs est donnée par les courbes d'intrados et d'extrados AmM et BnN, ainsi que par les directions des plans de joint. On suppose des forces quelconques appliquées aux voussoirs, et il s'agit de reconnaître si le système se maintiendra en équilibre.

Pour trouver les conditions de cet équilibre, on remarquera que la portion de voûte peut se rompre dans l'un quelconque des joints. Supposons que la rupture tende à s'effectuer dans le joint mn, et regardons la partie inférieure ABnm comme fixe, et la partie supérieure mnNM comme un corps solide : l'équilibre ne pourra subsister, à moins que les forces appliquées à ce corps ne soient telles 1° qu'elles ne puissent le faire glisser sur le joint mn, 2° qu'elles ne puissent le faire tourner autour des arêtes m et n. On nommera

x, y les coordonnées horizontale et verticale du point m;

x', y', les coordonnées horizontale et verticale du point n;

θ l'angle que la direction du joint mn forme avec la verticale;

z la longueur mn de ce joint;

a, b les coordonnées du point extrême M de la courbe d'intrados;

a', b' les coordonnées du point extrême N de la courbe d'extrados;

G, H les sommes des composantes verticales et horizontales des forces appliquées aux voussoirs compris dans la portion de voûte mnNM;

α, β les coordonnées du point d'application C de la résultante des forces G et H;

T la pression normale exercée contre le joint mn;

f le rapport du frottement à la pression, lorsque les parties de la voûte glissent sur les plans de joint;

γ la valeur de la force de cohésion, rapportée à l'unité de surface, qui doit être vaincue pour opérer ce glissement;

R la valeur de la force de cohésion, rapportée à l'unité de surface, qui est vaincue lorsque deux voussoirs se séparent, en s'écartant perpendiculairement au plan de joint.

212. Pour exprimer les conditions relatives au glissement sur le joint mn, on remarquera en premier lieu que la force qui tend à faire glisser la portion de voûte mnNM dans le sens nm est

$$(P+G)\cos.\theta;$$

et la force qui s'oppose à ce glissement,

$$(Q+H)\sin.\theta+f(P+G)\sin.\theta+f(Q+H)\cos.\theta+\gamma z:$$

d'où il suit que, pour que le glissement n'ait pas lieu, on doit avoir

$$P(1-f\,\text{tang.}\theta)-Q(\text{tang.}\theta+f)$$
$$<-G(1-f\,\text{tang.}\theta)+H(\text{tang.}\theta+f)+\frac{\gamma z}{\cos.\theta}.$$

On remarquera, en second lieu, que la force qui tend à faire glisser la même portion de voûte dans le sens mn est

$$(Q+H)\sin.\theta;$$

et la force qui s'oppose à ce glissement,

$$(P+G)\cos.\theta+f(P+G)\sin.\theta+f(Q+H)\cos.\theta+\gamma z:$$

d'où il suit que, pour que le glissement n'ait pas lieu, on doit avoir

$$-P(1+f\,\text{tang.}\theta)+Q(\text{tang.}\theta-f)$$
$$<G(1+f\,\text{tang.}\theta)-H(\text{tang.}\theta-f)+\frac{\gamma z}{\cos.\theta}.$$

L'équilibre de la portion de voûte ABNM exige que l'on puisse attribuer aux composantes P, Q des valeurs telles que ces conditions soient satisfaites, pour l'un quelconque des joints mn.

213. Pour exprimer maintenant les conditions relatives au mouvement de rotation autour des arêtes supérieure ou inférieure du joint mn, on supposera en premier lieu que la portion de voûte mnNM tend à tourner de haut en bas sur l'arête m, et que les forces P, Q sont appliquées en N, ce qui est le cas où elles ont le moins de tendance possible à favoriser ce mouvement. Le moment des forces qui tendent à faire tourner la portion de voûte est

$$P(a'-x)+G(\alpha-x);$$

et le moment des forces qui s'opposent à ce mouvement, en évaluant le moment de la résistance provenant de la cohésion comme on l'a fait n° 148, est

$$Q(b'-y)+H(\beta-y)+\tfrac{1}{3}Rz^2.$$

Ainsi, pour que le mouvement de rotation n'ait pas lieu, on doit avoir

$$P(a'-x)-Q(b'-y)<-G(\alpha-x)+H(\beta-y)+\tfrac{1}{3}Rz^2.$$

On supposera en second lieu que la portion de voûte mnNM tend à tourner de bas en haut sur l'arête n, et que les forces P, Q sont appliquées en M, ce qui est le cas où elles ont le moins de tendance possible à favoriser ce mouvement. Le moment des forces qui tendent à faire tourner la portion de voûte est

$$Q(b-y')+H(\beta-y');$$

et le moment des forces qui s'opposent à ce mouvement,

$$P(a-x')+G(\alpha-x')+\tfrac{1}{3}Rz^2.$$

Ainsi, pour que ce second mouvement de rotation n'ait pas lieu, on doit avoir

$$-P(a-x')+Q(b-y')<G(\alpha-x')-H(\beta-y')+\tfrac{1}{3}Rz^2.$$

L'équilibre de la portion de voûte ABNM exige, outre la condition indiquée dans le n° précédent, que les valeurs attribuées aux composantes P, Q soient telles que ces dernières conditions se trouvent encore satisfaites, pour l'un quelconque des joints mn.

Réciproquement, lorsque les conditions précédentes seront satisfaites pour tous les joints, la portion de voûte demeurera nécessairement en équilibre.

214. La valeur de la pression exercée perpendiculairement au joint mn, est

$$T=(P+G)\sin.\theta+(Q+H)\cos.\theta.$$

215. Si l'on supposait nulles les résistances provenant du frottement et de la cohésion, les conditions du n° 212, relatives à l'équilibre de glissement, se ré-

duiraient à une seule équation, qui serait

$$P - Q \operatorname{tang.}\theta = -G + H \operatorname{tang.}\theta, \text{ ou } \operatorname{tang.}\theta = \frac{P+G}{Q+H};$$

exprimant que la résultante des forces appliquées à la portion de voûte mnNM doit être perpendiculaire au joint mn. Dans l'hypothèse dont il s'agit, l'inclinaison de chaque joint a une valeur déterminée, lorsque les forces appliquées à la voûte sont données. La force appliquée au dernier joint MN, dont P et Q sont les composantes verticale et horizontale, doit être normale à ce joint.

216. En supposant toujours nulles les résistances provenant du frottement et de la cohésion, les conditions du n° 213, relatives à l'équilibre de rotation, deviennent

$$P(a'-x) - Q(b'-y) < -G(\alpha - x) + H(\beta - y),$$
$$-P(a-x') + Q(b-y') < \quad G(\alpha - x') - H(\beta - y');$$

elles expriment que la direction de la résultante des forces appliquées à la portion de voûte mnNM doit passe rentre les points m et n.

Application à une plate-bande.

217. Soit la portion de voûte dont on cherche les conditions d'équilibre la moitié ABNM (Fig. 25) d'une plate-bande uniformément épaisse. Faisons abstraction des résistances provenant du frottement et de la cohésion, et supposons la plate-bande uniquement soumise à l'action de la pesanteur. Conservons les dénominations du n° 211, et nommons

a la demi largeur AM;

c l'épaisseur MN;

Π le poids de l'unité de volume de la matière des voussoirs.

On aura, dans l'équation du n° 215, $P=0$, $H=0$, $G=\Pi[(a-x)c+\frac{1}{2}c^2 \text{ tang.}\theta]$; cette équation deviendra

$$\text{tang.}\theta=\frac{2\Pi(a-x)c}{2Q-\Pi c^2},$$

et donnera, si θ' désigne l'inclinaison du premier joint AB,

$$\text{tang.}\theta'=\frac{2\Pi ac}{2Q-\Pi c^2};\quad \text{d'où}\quad Q=\Pi\frac{2ac+c^2\text{tang.}\theta'}{2\text{ tang.}\theta'}.$$

On déduit delà

$$\frac{\text{tang.}\theta}{\text{tang.}\theta'}=\frac{a-x}{a}.$$

Ainsi, l'inclinaison θ' du premier joint AB étant donnée, la valeur de Q est déterminée par l'expression précédente, et l'équilibre exige que les directions de tous les joints se rencontrent en un même point O.

218. Quant aux conditions du n° 216 relatives à l'équilibre de rotation, elles deviennent, en les appliquant au joint AB,

$$Qc>\tfrac{1}{2}\Pi a^2c-\tfrac{1}{6}\Pi c^3\text{tang.}^2\theta',$$
$$-Qc<\tfrac{1}{2}\Pi ac(a+c\,\text{tang.}\theta')+\tfrac{1}{3}\Pi c^3\text{tang.}^2\theta'.$$

La seconde condition, exprimant que la portion de voûte ABNM ne peut tourner sur l'arête supérieure B de ce joint, est satisfaite, quelle que soit la valeur positive donnée à Q; et on voit effectivement, d'après la figure de la voûte, que ce mouvement est

impossible. Quant à la première condition, exprimant que la portion de voûte ABNM ne peut tourner sur l'arête inférieure A, on en conclut, en ayant égard à la valeur de Q trouvée dans le n° précédent, que l'angle θ' ne doit point surpasser la valeur donnée par l'équation

$$\text{tang.}^3\theta' - 3\left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)\text{tang.}\,\theta' + \frac{6a}{c} = 0.$$

Soit CD la verticale passant par le centre de gravité de la portion de voûte ABNM. Composons en C le poids de cette portion de voûte, avec la force horizontale Q, supposée appliquée suivant le ligne NB. La résultante des deux forces devra être normale au joint AB; et cette condition sera remplie, en adoptant la valeur de Q trouvée n° 217. De plus cette résultante devra passer entre les points A et B: il est évident qu'elle ne peut passer au-dessus de B; mais elle pourrait passer au-dessous de A. Par conséquent, si l'on mène AO perpendiculairement à CA, l'angle AOM ainsi obtenu est une limite que la valeur de θ' ne peut dépasser: cette limite est donnée par l'équation précédente.

219. Si l'épaisseur de la plate-bande était très-petite par rapport à l'ouverture, la limite dont il s'agit serait donnée, à fort peu près, par l'expression

$$\text{tang.}\,\theta' = \frac{2c}{a};$$

et l'on aurait sensiblement,

$$Q = \frac{\Pi a c}{\text{tang.}\,\theta'}, \quad \text{ou} \quad Q = \tfrac{1}{2}\Pi a^2.$$

220. En substituant dans la formule du n° 214 les

valeurs qui conviennent à la plate-bande, on trouve pour l'expression de la pression normale supportée par le joint AB,

$$T = \Pi\left(\frac{ac}{\sin.\theta'} + \frac{c^2}{2\cos.\theta'}\right).$$

221. Dans le cas où l'épaisseur de la plate-bande est très-petite par rapport à l'ouverture, cette expression devient

$$T = \frac{\Pi ac}{\sin.\theta'}.$$

222. Si l'on considère deux moitiés égales de plate-bande (Fig. 26), séparées par le joint vertical MN, l'équilibre ne pourra subsister, à moins que l'inclinaison des joints extrêmes AB, A'B' sur la verticale, ne soit au-dessous de la valeur de θ' donnée par l'équation du n° 218; et que tous les joints ne soient dirigés suivant des lignes passant par le même point O. L'expression de Q du n° 217, donnera la pression horizontale que les deux moitiés de la voûte exercent l'une contre l'autre dans le joint MN; et l'expression de T du n° 220 donnera la pression normale supportée par les joints extrêmes AB, A'B'. Les piédroits de la plate-bande devront offrir la stabilité nécessaire pour résister à ces pressions.

Conditions de l'équilibre d'un assemblage de voussoirs, en supposant tous les joints perpendiculaires à la courbe d'intrados.

223. Considérant une portion de voûte ABNM, dans laquelle tous les joints des voussoirs sont perpendiculaires à la courbe d'intrados A*m*M, appuyée à une

extrémité contre un plan fixe AB, et maintenue à l'autre extrémité par une force dont les composantes verticale et horizontale sont P et Q : on nommera

x, y les coordonnées Ap, pm d'un point quelconque m de la courbe d'intrados;

z la longueur du joint mn;

s la longueur de l'arc Am;

a, b les coordonnées du point extrême M;

S la longueur totale AmM de la courbe d'intrados;

ρ le rayon de courbure de cette courbe, au point m;

F la valeur de la force appliquée aux voussoirs, pour le point m de la courbe d'intrados, cette valeur étant rapportée à l'unité de longueur, et donnée en fonction de l'arc de la courbe.

φ l'angle que la direction de la force F forme avec l'axe horizontal des abscisses, cet angle étant également donné en fonction de l'arc de la courbe.

T la valeur de la pression exercée perpendiculairement au joint mn, par l'une des parties de la voûte contre l'autre.

Faisant abstraction des résistances provenant du frottement et de la cohésion, et appliquant ici les notions présentées n°s 211 et suivants, la première condition de l'équilibre du système est que la pression normale T, supportée par le joint mn, soit égale et directement opposée à la résultante de toutes les forces appliquées à la partie mnNM de la voûte. En remarquant que les composantes verticale et horizontale de la pression T sont respectivement $T\frac{dy}{ds}$ et $T\frac{dx}{ds}$; et que les sommes des composantes verticales et horizontales des forces ap-

pliquées à la portion mnNM de la voûte sont respectivement $\int_s^S ds.F\sin.\varphi$ et $\int_s^S ds.F\cos.\varphi$, cette condition donnera les deux équations,

$$T\frac{dy}{ds}=P+\int_s^S ds.F\sin.\varphi,$$

$$T\frac{dx}{ds}=Q+\int_s^S ds.F\cos.\varphi.$$

224. La seconde condition de l'équilibre du système est que la direction de la résultante de toutes ces forces passe entre les points m et n; mais il est inutile d'y avoir égard. Cette condition est implicitement comprise dans la supposition que les joints des voussoirs sont normaux à la courbe d'intrados, puisqu'alors les directions successives des résultantes dont il s'agit formeront nécessairement une seconde courbe parallèle à la première.

225. Différentiant les deux équations du n° 223, multipliant la première par $\frac{dx}{ds}$, la seconde par $\frac{dy}{ds}$, et ajoutant (en observant que $\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}=1$, et par conséquent $\frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds}=0$), on aura

$$-dT=F\,ds\left(\frac{dy}{ds}\sin.\varphi+\frac{dx}{ds}\cos.\varphi\right),$$

équation d'où l'on déduira la valeur de la pression.

Cas où les forces appliquées aux voussoirs sont partout normales à la courbe d'intrados.

226. Dans ce cas, $\sin.\varphi = \frac{dx}{ds}$ et $\cos.\varphi = -\frac{dy}{ds}$. L'équation trouvée dans le n° précédent donne

$$dT = 0,$$

en sorte que la pression est constante dans toute l'étendue de la voûte.

On aura donc, en différentiant les deux équations du n° 223,

$$T d.\frac{dy}{ds} = -F ds.\sin.\varphi, \quad T\frac{dx}{ds} = -F ds.\cos.\varphi;$$

d'où (en ayant égard aux valeurs de $\sin.\varphi$ et $\cos.\varphi$) l'on déduit

$$T d\varphi = -F ds,$$

ou, parce que $d\varphi$ (qui est l'angle de deux normales consécutives) $= \frac{ds}{\rho}$,

$$T = -\rho F, \text{ et } F = -\frac{T}{\rho}.$$

Ainsi la pression exercée d'un voussoir à l'autre est égale à la force appliquée normalement à chaque point de la courbe d'intrados, multipliée par le rayon de courbure en ce point; et l'équilibre exige que cette dernière force ait, dans toute l'étendue de la courbe, des valeurs réciproques au rayon de courbure.

227. Si la courbe d'intrados était un arc de cercle, la force appliquée aux voussoirs, perpendiculairement

à cette courbe, devrait avoir une valeur constante dans toute l'étendue de la voûte. L'équation précédente donne la relation qui existe entre cette force, et la pression qui s'établit entre les voussoirs. On en conclut que, si la courbe d'intrados était un cercle entier, la somme des forces normales appliquées à la voûte dans toute l'étendue de ce cercle, et la pression exercée d'un voussoir à l'autre, seraient entre elles comme la circonférence est au rayon, ou comme 2π est à 1.

228. On a supposé précédemment que les voussoirs pouvaient glisser sur les plans de joint, sans qu'aucune résistance provenant du frottement ou de la cohésion s'opposât à ce mouvement. En admettant l'existence du frottement et de la cohésion, il n'est plus nécessaire, pour que la voûte se maintienne en équilibre, que les forces appliquées perpendiculairement à la courbe d'intrados soient assujetties à la loi indiquée n° 226. Mais, quelles que soient les valeurs de ces forces, la pression normale existant entre les voussoirs, qui pourra alors varier d'un point de la voûte à l'autre, se calculera toujours en chaque point au moyen de la formule $T = \rho F$.

Cas où les forces appliquées à la voûte se réduisent en poids des voussoirs.

229. Conservons les dénominations du n° 223, et appelons

Π le poids de l'unité de volume de la matière des voussoirs,

θ l'angle que le joint mn forme avec la verticale, ce qui donne $\frac{dy}{ds} = \sin.\theta$, $\frac{dx}{ds} = \cos.\theta$.

Nous avons ici $\varphi = 90^\circ$, $F\,ds = \Pi z\,ds\left(1 + \frac{z}{2\rho}\right)$. Les équations du n° 223 deviendront

$$T \sin.\theta = -P + \Pi \int_s^S ds.z\left(1 + \frac{z}{2\rho}\right),$$

$$T \cos.\theta = Q;$$

d'où

$$\text{tang.}\,\theta = -\frac{P}{Q} + \frac{\Pi}{Q}\int_s^S ds.z\left(1 + \frac{z}{2\rho}\right).$$

Cette dernière équation devient, en différentiant,

$$\frac{d\theta}{\cos.^2.\theta} = -\frac{\Pi}{Q}\,ds.z\left(1 + \frac{z}{2\rho}\right);$$

ou $\left(\text{parce que } d\theta = -\frac{ds}{\rho}\right)$

$$\frac{2Q}{\Pi \cos.^2\theta} = 2\rho z + z^2,$$

équation qui donnera la loi de l'épaisseur des voussoirs, quand la figure de la courbe sera connue, et réciproquement.

Dans le cas dont il s'agit, et en général lorsqu'une voûte est sollicitée seulement par des forces verticales, la composante horizontale de la pression T est constante dans toute l'étendue de la courbe, et égale à la force Q. Cette force est ce qu'on nomme la *poussée horizontale* de la voûte.

230. Lorsque la courbe d'intrados est un arc de cercle, ρ est constant : l'équation du n° précédent donne

$$z = -\rho + \sqrt{\rho^2 + \frac{2Q}{\Pi \cos.^2\theta}}.$$

Si les joints extrêmes sont horizontaux, la longueur de ces joints est infinie.

Appelant c la longueur du joint placé au sommet de la voûte, où la direction de ce joint est verticale, on a

$$Q = \frac{1}{2}\Pi(2\rho c + c^2)$$

pour la valeur de la poussée horizontale.

La pression exercée perpendiculairement au joint mn est

$$T = \frac{Q}{\cos.\theta}.$$

ARTICLE II.

Principales expériences et observations relatives à l'équilibre des voûtes.

231. Dans des expériences sur de petits modèles de voûtes en berceau, qu'il faisait rompre en chargeant par des poids les parties supérieures, M. Danisy (*a*) a montré que, lors de la rupture, les parties supérieures s'abaissaient en s'appuyant l'une contre l'autre à la clef, et en écartant les parties inférieures, qui se renversaient en tournant sur les arêtes extérieures de leurs bases. Il a fait remarquer que, dans ces mouvements, les voussoirs ne glissaient point sur les plans de joint, mais s'écartaient les uns des autres en tournant sur les arêtes contigues. Des expériences sembla-

(*a*) Traité de la coupe des pierres, de Frezier, tome III. Ces expériences ont été faites en 1732, devant l'Académie de Montpellier.

bles ont été faites depuis par MM. Gauthey (*a*) et Rondelet (*b*).

232. M. Boistard, ingénieur en chef des ponts-et-chaussées, a publié d'autres expériences faites plus en grand, et avec plus de précision (*c*). Les voûtes avaient 2^m, 27 d'ouverture, et étaient construites avec des voussoirs en briques, polis au grès, ayant 0^m, 11 d'épaisseur et de hauteur. On a formé avec ces matériaux des voûtes en plein ceintre, en anse de panier surbaissées au tiers et au quart, en arc de cercle dont la flèche était le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{8}$ et le $\frac{1}{17}$ de l'ouverture, et en plate-bande. Chacune de ces voûtes a été soumise à trois épreuves principales. Dans la première, les voûtes étaient extradossées sur 0^m, 11 d'épaisseur, et cette épaisseur n'étant pas suffisante pour qu'elles pussent se maintenir en équilibre quand on abaissait le cintre, un certain nombre de voussoirs de la partie supérieure s'abaissait en portant sur le sommet de ce cintre (Fig. 28). Les deux parties inférieures de la voûte formaient des arcs rampants, et se partageaient en deux portions. La rupture tendait à se faire vers le milieu de chacun de ces arcs, où les voussoirs ne touchaient point le cintre, et où les joints s'ouvraient à l'extrados; tandis que les joints s'ouvraient à l'intrados aux extrémités supérieure et inférieure de chaque arc.

(*a*) Dissertation sur les dégradations du Panthéon français, page 111. Traité de la construction des ponts, tome I, page 313.

(*b*) Art de bâtir, tome III, page 236 et suiv.

(*c*) Recueil de divers Mémoires, publié par Le Sage, tome II, page 170; ou Recueil d'expériences et d'observations, faites par Boistard, page 95. Ces expériences ont été faites en 1800.

233. Dans la seconde épreuve, les voûtes étaient encore extradossées. On embrassait de chaque côté un certain nombre de voussoirs de la partie inférieure par une corde qui s'appuyait sur l'extrados, et qui était tendue par un poids. Si la tension de la corde n'était pas suffisante pour maintenir la voûte en équilibre, cette voûte se rompait en s'ouvrant à l'intrados près de la clef et aux naissances, et à l'extrados dans les reins (Fig. 29). Si la tension de la corde était suffisante pour l'équilibre, les mêmes joints s'ouvraient de la même manière, par l'effet du tassement; mais l'action des poids tendant à les faire resserrer, ils s'ouvraient et se fermaient alternativement par une sorte de mouvement d'oscillation, dans lequel les parties de la voûte tournaient alternativement dans les deux sens, et en s'appuyant tantôt sur les arêtes supérieures et tantôt sur les arêtes inférieures des voussoirs. Enfin, si la tension de la corde était augmentée au-delà d'une certaine limite, des effets analogues aux premiers se manifestaient en sens contraire (fig. 30); c'est-à-dire que les parties inférieures de la voûte tendaient à s'abaisser, et les parties supérieures à être soulevées, les joints s'ouvrant à l'extrados près de la clef et aux naissances, et à l'intrados dans les reins.

234. Dans la troisième épreuve on construisait des culées, et l'on remplissait les reins de la voûte en maçonnerie arrasée au niveau du sommet, où l'épaisseur était toujours de $0^m, 11$. Si l'épaisseur des culées était suffisante, la voûte se maintenait en équilibre, lorsqu'on abaissait le cintre. Dans le cas contraire, ou si l'on chargeait davantage le sommet de la voûte, cette voûte se rompait en quatre parties (fig. 31), les joints s'ou-

vrant à l'intrados à la clef et aux naissances, et à l'extrados dans les reins.

Il résulte de ces expériences que, dans les voûtes en demi cercle, extradossées d'égale épaisseur ou extradossées de niveau, la rupture tend à se faire vers l'angle de 30° environ, à compter de la naissance du demi cercle Dans les voûtes en anse de panier décrites avec trois arcs de cercle de 60° chacun, et surbaissées au tiers ou au quart, la rupture tend à se faire vers l'angle de 45° ou de 55°, à compter de la naissance du petit arc. Dans les voûtes en arc de cercle, le point de rupture est à l'intersection de l'arc et du piédroit, à moins que la voûte ne soit extradossée sur une très-petite épaisseur, ou que l'amplitude de l'arc ne surpasse 120° environ (*a*).

235. Les observations faites par M. Perronet (*b*), lors de la construction de plusieurs grands ponts, indiquent également la nature des mouvements qui ont lieu dans les voûtes. D'après ces observations, les premiers cours de voussoirs peuvent être posés sans l'appui du cintre, et ne commencent à glisser qu'autant que l'inclinaison

---

(*a*) On trouve d'autres expériences relatives à l'équilibre des voûtes, dans l'ouvrage intitulé *A dissertation on the construction and properties of arches*, par G. Atwood, 1801. L'auteur considérait les voûtes dans l'hypothèse du glissement des voussoirs, et ses expériences, faites avec des voussoirs en cuivre bien polis, se rapportent spécialement à cette hypothèse.

(*b*) Mémoire sur le cintrement et décintrement des ponts. Voyez aussi le Recueil d'expériences et d'observations, par M. Boistard, et les Études relatives à l'art des constructions, par M. Bruyère, premier recueil.

des joints sur l'horizon est de 39° à 40° (*a*). Au-delà de cette inclinaison, le cintre porte une portion du poids des voussoirs; et, quand on emploie un cintre retroussé, il s'abaisse dans les parties inférieures, et se souleverait au sommet, si l'on ne s'opposait à ce mouvement en plaçant sur ce sommet une charge suffisante.

Ces effets ont été observés à l'arche de St-Edme, à Nogent-sur-Seine, dont la figure est une anse de panier, ayant 29m, 24 d'ouverture et 8m, 77 de flèche (Fig. 32). L'épaisseur au sommet est de 1m, 62. Chaque moitié est composée de 47 cours de voussoirs, non compris la clef. Les 20 premiers cours de voussoirs ayant été posés, les 5 derniers se séparèrent à raison du tassement du cintre; le joint s'ouvrit de 0m, 02 à l'extrados au-dessus du 15e cours, et il se fit une disjonction verticale entre la voûte et les assises horizontales des culées, dont l'effet était sensible jusqu'au 7e cours. En continuant la pose, ces joints se refermèrent: le point de rupture se trouva reporté plus haut, et les joints s'ouvrirent de 0m, 002 à l'extrados, du 26e au 31e cours.

La figure des arches du pont de Neuilly, est une anse de panier surbaissée au quart, ayant 39m d'ouverture. Chaque moitié est composée de 56 cours de voussoirs, non compris la clef. Dans les arches adjacentes au culées, les joints se sont successivement ouverts à l'extrados, en raison de l'avancement de la pose

(*a*) Cela suppose que le rapport du frottement à la pression est environ 0,82, et cette observation s'accorde sensiblement avec le résultat rapporté ci-dessus, n° 206.

des voussoirs, depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à 5 et 7 millimètres, du 11e au 36e cours. Des effets analogues ont été observés dans les autres ponts.

236. D'autres mouvements ont lieu après la pose des clefs : les cintres sont alors chargés sur le sommet, et tendent à se soulever vers les reins. On avait tracé, avant le décintrement, sur les têtes de l'arche de Nogent (Fig. 32), trois lignes droites, l'une horizontale placée au sommet de la voûte, du dessus d'un 28e cours à l'autre; et les deux autres inclinées, depuis les extrémités de la première jusques aux points où le joint du 7e cours rencontre la tangente verticale aux naissances. La position de ces lignes avait été rapportée à des points fixes. Les derniers joints ouverts à l'extrados, dans la partie supérieure de la voûte, se sont resserrés, et la disjonction verticale qui s'était faite entre les voussoirs et les assises des culées, a presque entièrement disparu. La ligne horizontale a pris une courbure indiquant un tassement vertical, qui allait en diminuant uniformément depuis le milieu de cette ligne jusqu'aux extrémités. Il s'est formé dans la courbure des deux autres lignes un point d'inflexion, à la rencontre du joint entre le 16e et le 17e cours; ce qui indiquait, outre le tassement vertical et le resserrement des joints dans les cours supérieurs, jusques et compris le 17e, un resserrement semblable dans les joints de la partie inférieure, qui se trouvait reportée vers les culées. Le point de rupture se trouvait donc placé entre le 16e et le 17e cours des voussoirs, et on doit remarquer que la maçonnerie des reins était achevée lors du décintrement.

Au pont de Neuilly, après la pose des clefs, les der-

niers joints qui s'étaient ouverts à l'extrados se sont refermés; et, de chaque côté, de nouveaux joints se sont ouverts à l'intrados, à partir de la clef. Les joints sont restés ouverts à l'extrados dans les reins; la plus grande ouverture avait lieu entre le 26e et le 27e cours de voussoirs, ce qui a indiqué la position du point de rupture. La maçonnerie des reins n'était pas construite lors du décintrement.

237. Les résultats précédents se rapportent aux voûtes en berceau : les observations faites sur les dégradations du dôme de St-Pierre de Rome, peuvent fixer les idées sur les mouvements analogues qui ont lieu dans les voûtes sphériques. Il résulte de ces observations que cet édifice tendait à s'écrouler de la manière indiquée fig. 33; la maçonnerie, qui offrait un grand nombre de lézardes dans la direction des plans méridiens, s'ouvrant à l'extrados en V, à la naissance de la voûte, et à l'intrados en A D, à la base du tambour sur lequel cette voûte est portée. Dans ce mouvement, les contreforts s'étaient séparés du mur du tambour. Ces dégradations ont été arrêtées au moyen de cercles de fer qui s'opposent à l'agrandissement du diamètre de la partie inférieure du dôme (*a*).

(*a*) Les dégradations survenues au dôme de Saint-Pierre de Rome sont décrites en détail dans l'ouvrage de Poleni, intitulé *Memorie istoriche della gran cupola del tempio Vaticano*, Padoue, 1748. On y trouve l'extrait de tous les écrits faits jusqu'à cette époque sur la coupole du Vatican, parmi lesquels on doit distinguer le *Parere di tre matematici sopra i danni che si sono trovati nella cupola di San Pietro sul fine dell' anno* 1742. Dans ce dernier ouvrage, dû aux PP. Lesueur, Jacquier et Boscowich, la question de l'équilibre des voûtes est traitée avec beaucoup d'exactitude et de sagacité. Les dé-

238. Le résultat général des observations et expériences qui viennent d'être indiquées, est 1° que, dans les mouvements des voûtes, les parties qui se séparent ne glissent pas les unes sur les autres, mais s'écartent en tournant sur les arêtes supérieures ou inférieures des voussoirs; 2° qu'une voûte, en se rompant, se sépare ordinairement en quatre parties principales, les deux parties supérieures s'abaissant, pendant que les deux parties inférieures sont renversées en dehors. On ne doit pas en conclure d'ailleurs qu'une voûte ne puisse se rompre par l'effet du glissement des voussoirs; mais seulement que, d'après les proportions qu'on

---

gradations du dôme y sont présentées comme étant le résultat des mouvements que nous indiquons ici, et qui seraient produits par la poussée des parties supérieures. Poleni n'est pas d'accord sur ce point avec ces savants: il n'admet pas que la poussée du dôme ait écarté les parties inférieures, et attribue uniquement les dégradations à des tassements inégaux produits par des défauts de construction. Cependant il propose d'y remédier au moyen de plusieurs ceintures de fer, qui ont été placés sous sa direction par Vanvitelli, en 1748, et auxquelles on en a depuis ajouté d'autres. Ces armatures ne peuvent avoir d'autre objet que de contribuer à détruire l'action horizontale de la poussée.

Les idées des PP. Lesueur, Jacquier et Boscowich ont été adoptées par M. Gauthey, dans sa Dissertation sur les dégradations du Panthéon français, page 117. Elles sont contredites par M. Rondelet, Art de bâtir, tome II, page 69, tome III, page 222. Mais les notions présentées par cet architecte, qui a toujours soutenu que les voûtes en dôme n'avaient pas de poussée horizontale, ne sont pas conformes à la vérité.

Il paraît que Christophe Wren, habile géomètre, qui a construit, de 1675 à 1710, la cathédrale de Saint-Paul à Londres, avait adopté, sur l'équilibre des voûtes, des notions semblables à celles dont il s'agit ici. Voyez *Account of the Family Wren*, pages 356 et suivantes; cité par Robison, *A system of mechanical philosophy*, tom. I, p. 642.

leur donne ordinairement, et les valeurs du frottement et de la cohésion, les voûtes se rompent plus facilement par l'écartement que par le glissement des parties. Il arrive quelquefois que les parties inférieures de la voûte cèdent en glissant sur les joints horizontaux placés au-dessous des naissances, en même temps que les parties supérieures s'abaissent en tournant sur les arêtes des voussoirs.

ARTICLE III.

De l'établissement des voûtes.

239. La figure et les dimensions générales d'une voûte sont déterminées par la destination de l'édifice dont cette voûte fait partie. Ainsi l'on regarde ordinairement comme données l'ouverture de la voûte, la courbe d'intrados, la hauteur des piédroits, la distribution des poids que la voûte doit supporter. On se donne aussi d'avance, d'après l'exemple des constructions analogues à celle que l'on projette, et regardées comme les plus parfaites, l'épaisseur de la voûte au sommet. Cette épaisseur est conservée la même dans toute l'étendue de la voûte, ou bien on l'augmente progressivement, du sommet aux naissances. Quant une voûte est projettée, on doit s'assurer qu'elle demeurera en équilibre lors du décintrement. On établit l'équilibre d'une voûte, soit en chargeant davantage les parties qui tendent à être soulevées, soit en donnant plus d'épaisseur à ces parties. On doit vérifier également que les pressions exercées dans les diverses parties de la voûte ne sont pas assez considérables pour causer l'écrasement de la pierre ou des autres matériaux dont

les voussoirs sont formés. Ces recherches, dans lesquelles consiste proprement l'établissement des voûtes, ne comportent que des applications des notions présentées dans l'article 1er.

De l'équilibre des voûtes en berceau.

240. Considérons une voûte en berceau, composée de deux parties égales séparées par un joint vertical. L'action des poids supportés par la voûte produit perpendiculairement à ce joint, entre les deux moitiés, une pression. On pourrait supprimer une des moitiés de la voûte, et la remplacer par une force horizontale égale à la pression dont il s'agit. Si cette force horizontale est assez grande pour opérer une rupture dans la moitié restante, en la repoussant en dehors en totalité ou en partie; ou si elle n'est pas assez grande pour empêcher cette moitié de tomber en dedans; la voûte ne pourra se maintenir en équilibre. Elle s'y maintiendra dans le cas contraire. La recherche des conditions de cet équilibre comporte divers cas qui doivent être distingués et examinés à part.

ABNM (fig. 34) représentant la moitié d'une voûte en berceau, et mn étant un joint quelconque, dans lequel on suppose que la rupture peut s'effectuer, on nommera

b, b' les distances OM, ON;

x, y les distances Ap, mp;

x', y' les distances Aq, nq;

z la longueur mn du joint;

θ l'angle que ce joint forme avec la verticale;

G le poids de la portion de voûte mnNM pour une unité de longueur de cette voûte;

α la distance AD du point A à la verticale passant par le centre de gravité C de cette portion de voûte;

T la pression normale exercée contre le joint mn, pour l'unité de longueur de la voûte;

f, γ, R auront les significations indiquées n° 211.

241. Supposant d'abord que la rupture de la voûte ne peut s'opérer que par le glissement des voussoirs le long des plans de joint, on voit facilement, d'après le n° 212, que la force horizontale Q appliquée en NM, nécessaire pour empêcher la portion de voûte mnNM de glisser de haut en bas sur nm, a pour expression

$$Q = \frac{G(\cos.\theta - f\sin.\theta) - \gamma z}{\sin.\theta + f\cos.\theta}. \quad (A)$$

Les valeurs (A) ayant été calculées pour tous les joints compris dans la demi-voûte, la plus grande de ces valeurs devra être prise pour la pression que les deux moitiés de la voûte exercent l'une contre l'autre à la clef, pression que l'on désigne ordinairement sous le nom de *poussée horizontale* de la voûte.

On remarquera ensuite que la force horizontale Q, appliquée en MN, qui serait assez grande pour repousser la portion de voûte mnNM, en la faisant glisser dans le sens mn, aurait pour expression

$$Q = \frac{G(\cos.\theta + f\sin.\theta) + \gamma z}{\sin.\theta - f\cos.\theta}. \quad (A_1)$$

Les valeurs (A_1) ayant été calculées pour tous les joints compris dans la demi-voûte, on sera assuré que la voûte est en équilibre, si toutes ces valeurs sont plus

grandes que la poussée horizontale, déterminée comme on vient de le dire. Dans le cas contraire, l'équilibre ne pourrait subsister.

Ainsi l'équilibre de la voûte exige que le maximum de (A) soit plus petit que le minimum de (A_1).

242. D'après les formes et les proportions que les voûtes offrent le plus communément, le joint de rupture qui donnera la valeur maximum de l'expression (A) sera placé dans les reins de la voûte. Le joint qui donne la valeur minimum de l'expression (A_1) est le plus souvent le premier joint horizontal placé au-dessous des naissances. Alors la voûte tend à rompre de la manière indiquée fig. 35, la partie supérieure s'abaissant, en même temps que les parties inférieures sont, de chaque côté, repoussées en dehors.

Il peut arriver aussi que le joint qui donne le maximum de l'expression (A) soit placé aux naissances, ou près des naissances de la voûte, tandis que le joint qui donne le minimum de l'expression (A_1) est placé près du sommet. Alors la voûte tendrait à rompre de la manière indiquée fig. 36, la partie supérieure s'élevant, en même temps que les parties inférieures glissent en dedans de chaque côté.

243. En admettant présentement que la rupture de la voûte ne peut s'opérer que par l'écartement des voussoirs, tournant sur les arêtes supérieures ou inférieures des joints, on verra, d'après le n° 213, que la force horizontale Q (fig. 34), appliquée au point N, nécessaire pour empêcher la portion de voûte *mn*NM de tourner de haut en bas sur l'arête *m*, a pour expression

$$Q = \frac{G(\alpha - x) - \frac{1}{3} R z^2}{b' - y}. \quad (B)$$

Les valeurs (B) ayant été calculées pour tous les joints compris dans la demi-voûte, la plus grande de ces valeurs devra être prise pour la poussée horizontale de la voûte.

On remarquera ensuite que la force horizontale Q, appliquée en N, qui serait assez grande pour faire tourner la portion de voûte mnNM de bas en haut sur l'arête n, aurait pour expression

$$Q = \frac{G(a - x') + \frac{1}{3}Rz^2}{b' - y'}. \quad (B_1)$$

Les valeurs (B_1) étant calculées pour tous les joints de la demi-voûte, on sera assuré de l'existence de l'équilibre, si toutes ces valeurs sont plus grandes que la poussée horizontale. Dans le cas contraire, l'équilibre n'aurait pas lieu.

L'équilibre de la voûte exige donc que le maximum de (B) soit plus petit que le minimum de (B_1).

Ce que l'on vient de dire suppose d'ailleurs le maxi- de (B) donné par un joint de rupture voisin du sommet, et le minimum de (B_1) donné par un joint de rupture voisin des naissances. Alors la voûte tend à se rompre de la manière indiquée fig. 37, les parties supérieures s'abaissant en s'appuyant l'une contre l'autre par l'arête supérieure du joint placé au sommet, tandis que les parties inférieures, renversées en-dehors, tournent sur les arêtes extérieures de leurs bases. Les parties supérieures portent alors contre les parties inférieures par l'arête du joint de rupture placée à l'intrados.

244. La voûte, comme on l'a vu n° 233, peut également se rompre de la manière indiquée fig. 38, les

parties inférieures tombant en dedans en tournant sur les arêtes inférieures de leurs bases, tandis que les parties supérieures sont soulevées en portant l'une contre l'autre par l'arête inférieure du joint placé au sommet. Les parties supérieures portent alors contre les parties inférieures par l'arête d'extrados du joint de rupture. Pour vérifier l'équilibre relatif à ce dernier genre de rupture, on doit remarquer que la force Q, appliquée en M (fig. 34), qui empêcherait la portion de voûte mnNM de tourner de bas en haut sur l'arête m, a pour expression

$$Q = \frac{G(a-x) - \frac{1}{3}Rz^2}{b-y}. \quad (b)$$

Le maximum de cette expression doit être pris pour la poussée horizontale de la voûte.

On remarquera ensuite que la valeur nécessaire à la force Q appliquée en M, pour soulever la portion de voûte mnNM, en la faisant tourner sur l'arête n, est

$$Q = \frac{G(a-x') + \frac{1}{3}Rz^2}{b-y'}. \quad (b^1)$$

L'équilibre exige donc ici que le maximum de (b) soit plus petit que le minimum de (b_1).

245. On a supposé dans le n° 241, que la rupture de la voûte devait s'opérer seulement par glissement, et dans les n°s 243 et 244 que cette rupture devait s'opérer seulement par écartement. La rupture peut aussi avoir lieu en partie par glissement, et en partie par écartement. Le cas le plus ordinaire est celui où la voûte tend à se rompre de la manière indiquée n° 243, fig. 37; et il arrive aussi quelquefois que les parties supérieures

s'abaissant comme le représente cette figure, les parties inférieures sont repoussées de la manière indiquée fig. 35. Il est évident que, pour prévenir ce mouvement, le maximum de l'expression (B) doit être rendu moindre que le minimum de l'expression (A_1). Les autres cas de rupture se présenteront très-rarement, et il est inutile de vérifier l'équilibre qui leur est relatif pour la plupart des voûtes que l'on peut avoir à construire.

On aura d'ailleurs égard à toutes les combinaisons possibles, en remarquant que l'équilibre exige 1° que les expressions (A) et (B) soient, dans toute l'étendue de la voûte, plus petites que (A_1) et (B_1); 2° que les expressions (A) et (b) soient, dans toute l'étendue de la voûte, plus petites que (A_1) et (b_1).

Si l'on veut négliger les résistances provenant du frottement et de la cohésion, on supposera dans les formules précédentes f, γ, R égaux à zéro. Dans le cas contraire, on évaluera ces quantités d'après les résultats rapportés nos 22 et 23, 205 et suivants.

246. Lorsque la voûte est élevée sur des culées ou piédroits, tout ce qui vient d'être dit doit être appliqué, en regardant les culées ou piédroits comme faisant partie de la voûte.

247. D'après ce qui précède, le procédé que l'on doit suivre pour vérifier l'existence de l'équilibre dans une voûte, consiste (a), dans la presque totalité des cas

---

(a) Le procédé que l'on indique ici, fondé sur les notions exposées dans les numéros précédents, est conforme à la théorie donnée par Coulomb, dans les Mémoires des savants étrangers présentés à l'Académie des Sciences, 1773. M. Audoy a remarqué, dans le no 4 du Mémorial de l'officier du génie, que les conditions d'équilibre obtenues par ce procédé ne différaient point de celles que l'on

qui peuvent se présenter, 1° à chercher la valeur de la poussée horizontale Q appliquée en N (Fig. 34), en supposant diverses positions au joint de rupture mn dans les reins de la voûte, et s'arrêtant à la position pour laquelle l'expression du n° 243,

$$Q = \frac{G(\alpha - x) - \frac{1}{3}Rz^2}{b' - y},$$

ou simplement (en négligeant l'adhésion des mortiers)

$$Q = G\frac{\alpha - x}{b' - y},$$

donne la plus grande valeur.

2° A examiner si l'action de la poussée horizontale, ainsi déterminée, est assez grande pour renverser en dehors, en la faisant tourner sur l'arête des voussoirs, une partie de la demi-voûte ABNM, ou la totalité de cette demi-voûte. On reconnaîtra généralement, à la seule inspection, que la poussée horizontale renverserait plus facilement la demi-voûte entière qu'une portion de cette demi-voûte. Ainsi on devra faire la vérification dont il s'agit, en supposant la rupture dans le premier joint AB; c'est-à-dire s'assurer que l'expression

$$Q = \frac{G(\alpha - x') + \frac{1}{3}Rz^2}{b' - y'},$$

ou, en négligeant l'adhésion des mortiers,

$$Q = G\frac{\alpha - x'}{b' - y'},$$

---

trouve par les méthodes moins simples exposées dans le Recueil d'expériences et d'observations de M. Boistard, et dans le Traité de la construction des ponts de M. Gauthey.

calculée pour ce joint, est plus grande que la poussée horizontale.

3° A examiner si la poussée horizontale peut faire glisser sur les plans de joint une partie, ou la totalité de la demi-voûte; c'est-à-dire à s'assurer que l'expression

$$Q = \frac{G(\cos.\theta + f\sin.\theta) + \gamma z}{\sin.\theta - f\cos.\theta},$$

ou, en négligeant l'adhésion des mortiers,

$$Q = G\frac{\cos.\theta + f\sin.\theta}{\sin.\theta - f\cos.\theta},$$

calculée pour un joint quelconque voisin de la naissance de la voûte, est plus grande que la poussée horizontale. Si ce joint était horizontal, l'expression précédente deviendrait simplement

$$Q = fG + \gamma z,$$

ou, en négligeant l'adhésion des mortiers,

$$Q = fG.$$

On pourra s'aider, pour la recherche de la situation du joint de rupture et de la poussée horizontale, des résultats rapportés nos 234 et suivants. Dans les voûtes en arc de cercle et en plate-bande, la position du joint de rupture est connue d'avance, et la valeur de la poussée horizontale peut être calculée immédiatement.

Lorsque le résultat du calcul a fait connaître que la voûte projetée ne serait pas en équilibre, on doit augmenter l'épaisseur au sommet, ou la largeur des piédroits, ou les poids dont ils sont chargés. Si le défaut

d'équilibre provenait de ce que les parties inférieures sont exposés à glisser sur les plans de joint, on pourrait y remédier sans augmenter le volume de la maçonnerie, soit en interrompant les joints par des pierres posées debout, soit en inclinant en dedans les plans de joint, soit enfin en liant les parties de la maçonnerie par des armatures en fer.

248. Lorsque les parties inférieures de la voûte, ou les culées ou piédroits sur lesquels elle est établie, ne sont pas formés avec des pierres qui en occupent toute l'épaisseur, il est nécessaire d'avoir égard à la possibilité d'une rupture dans la maçonnerie de ces piédroits, conformément à ce qu'on a vu n°s 148 et suivants. Par exemple, dans la voûte dont la fig. 39 représente la moitié, on sait d'avance que la rupture tend à s'opérer suivant *mno*. On calculera donc la poussée horizontale Q, d'après la condition que cette force, appliquée en N, empêche la partie *mno*NM de tourner sur l'arête *m*. Pour s'assurer ensuite que la poussée Q, ainsi déterminée, ne peut opérer le renversement du piédroit en le faisant tourner sur l'arrête B, on doit regarder ce piédroit comme susceptible de se diviser suivant une ligne inclinée B*t*, et établir les conditions d'équilibre de la masse ABCNM, soumise à l'action de la force horizontale Q, qui tend à la faire tourner sur l'arête B, en se conformant à ce qui a été fait dans les n^{os} cités.

Si la force de cohésion du mortier, dans la maçonnerie de la culée, était supposée très-petite ou nulle, on devrait admettre immédiatement (conformément aux n°s 151 et 152), que la rupture du piédroit aura lieu suivant la direction B*m*, et ne tenir aucun compte de la portion de maçonnerie A B*m*.

249. Lorsque la fondation d'une voûte est établie sur un terrain compressible, on doit avoir égard aux considérations exposées nos 191 et suivants. Ainsi, pour la voûte dont on vient de parler, la largeur $\alpha\beta$ de la fondation devrait être déterminée par la condition que le moment du poids de la masse de maçonnerie $\alpha\beta$CNMm, pris par rapport au milieu de $\alpha\beta$, fût égal au moment de la poussée horizontale Q, pris par rapport au même point.

Des pressions exercées contre les plans de joint dans les voûtes en berceau.

250. Supposant que la valeur de la poussée horizontale Q ait été calculée conformément au n° 247, et conservant les dénominations du n° 240, qui se rapportent à la fig. 34, on aura

$$T = G \sin.\theta + Q \cos.\theta$$

pour la valeur de la pression exercée normalement contre un joint quelconque mn. Cette pression, pour un joint horizontal tel que AB, se réduit à

$$T = G,$$

G représentant le poids de ABNM. Pour le joint vertical MN, elle se réduit, comme cela doit être, à

$$T = Q.$$

251. La connaissance de la valeur des pressions exercées perpendiculairement aux plans de joint ne suffit pas pour vérifier que ces pressions ne sont pas assez grandes pour causer l'écrasement de la pierre. Il fau-

drait connaître de plus la manière dont les pressions peuvent être réparties dans la hauteur *mn* des plans de joint. Considérons une voûte dans laquelle la rupture tend à s'opérer de la manière indiquée fig. 37, et qui est en équilibre, ensorte que si l'on diminuait un peu la largeur des piédroits, la rupture aurait lieu; et regardons les voussoirs comme des corps parfaitement durs appliqués les uns contre les autres. La pression qui s'exerce contre le joint MN (Fig. 34), et qui est la poussée horizontale Q, sera évidemment appliquée contre l'arête supérieure N. Si *mn* était le joint de rupture, la pression exercée contre ce joint serait aussi évidemment appliquée contre l'arête *m*. Enfin la pression exercée contre le dernier joint AB le sera évidemment contre l'arête B. Quant aux joints intermédiaires, on doit admettre qu'aux joints voisins de MN et AB, la pression est appliquée contre les arêtes supérieures; et qu'aux joints voisins du joint de rupture, la pression est appliquée contre les arêtes inférieures. On distinguerait les joints intermédiaires entre ceux où la pression est appliquée à l'arête supérieure, et ceux où elle est appliquée à l'arête inférieure, par la condition que la résultante des deux forces G et Q, qui produisent cette pression, passe à égale distance des arêtes supérieure et inférieure.

252. Dans la réalité, les voussoirs n'étant pas des corps parfaitement durs, on ne peut admettre que les pressions s'exercent ainsi contre des arêtes. Cela n'empêche pas que l'on ne puisse calculer, avec une exactitude suffisante, l'équilibre des voûtes d'après les règles énoncées précédemment; mais il paraît nécessaire d'avoir égard à l'élasticité de la matière des voussoirs, pour évaluer les efforts auxquels les parties de la pierre

sont exposées. Cette question serait un cas particulier d'une question plus générale, qui consiste à déterminer les effets qui se produisent dans un corps élastique de figure quelconque, soumis à l'action de diverses forces. La solution de ce dernier problème ne pouvant être donnée ici, on cherchera à déterminer les efforts dont il s'agit d'après des suppositions qui paraissent s'éloigner très-peu des effets naturels, et qui sont propres à donner des limites, dont la connaissance est très-utile pour l'établissement des constructions.

Supposons, comme dans le n° précédent, la voûte en équilibre, et la rupture prête à s'opérer de la manière indiquée fig. 37. Les joints pour lesquels il importe le plus de connaître la valeur de la pression supportée par la pierre, sont les joints de rupture, savoir les joints extrêmes MN et AB (Fig. 34), et le joint de rupture placé dans les reins, que nous supposerons être *mn*.

En considérant d'abord le joint MN, et remarquant que la voûte étant prête à se rompre, ce joint tend à s'ouvrir en M, nous admettrons 1° que les deux voussoirs séparés par ce joint, ne pressent point l'un contre l'autre par l'arête inférieure M; 2° que, par l'effet de l'élasticité de la matière dont ils sont formés, ils se sont un peu comprimés en s'appuyant l'un contre l'autre, de manière que la compression, qui est nulle à l'arête M, augmente uniformément depuis cette arête jusqu'à l'arête supérieure N; 3° que les éléments de la hauteur du joint résistent avec des forces proportionnelles aux compressions qu'ils subissent, et qui augmentent aussi uniformément, depuis l'arête M où elles sont nulles, jusqu'à l'arête N où elles sont à leur

maximum. Cela posé, nommant

K la pression maximum qui s'exerce contre l'arête N, la valeur de cette pression étant rapportée à l'unité de surface;

v la distance d'un point quelconque de MN à l'extrémité inférieure M;

c la hauteur totale MN de ce joint;

on aura $\frac{Kvdv}{c}$ pour la pression qui s'exerce contre l'élément, de la hauteur du voussoir dv placé à la distance v de l'arête inférieure. Or les pressions exercées contre tous les éléments doivent être telles que la somme de leurs moments, pris par rapport à l'arête m, soit égale au moment du poids G de la portion de voûte mnNM, pris par rapport à la même arête. Cette somme de moments étant

$$\frac{K}{c}\int_0^c dv.v(b-y+v), \text{ ou } \tfrac{1}{6}K[3(b-y)c+2c^2],$$

on a donc l'équation

$$\tfrac{1}{6}K[3(b-y)c+2c^2]=G(\alpha-x);$$

d'où

$$K=\frac{6G(\alpha-x)}{3(b-y)c+2c^2}.$$

On pourra calculer, au moyen de cette formule, la valeur de la plus grande pression à laquelle la pierre est exposée à la clef d'une voûte sur l'unité superficielle, et vérifier, d'après ce qui a été dit n° 122, si cette pierre a la force nécessaire pour y résister.

253. On remarquera ici que, dans les hypothèses

qui viennent d'être établies, on doit prendre pour la poussée horizontale de la voûte la somme des pressions exercées dans la hauteur du joint MN. En désignant cette somme par Q', on aura

$$Q' = \frac{K}{c}\int_0^c dv.v = \tfrac{1}{2}Kc;$$

et en mettant pour K la valeur précédente,

$$Q' = \frac{3G(\alpha - x)}{3(b-y)+2c}.$$

Le point d'application de la résultante Q' est aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur du joint, à compter de l'extrémité inférieure M. Cette nouvelle valeur de la poussée horizontale surpasse un peu la valeur désignée ci-dessus par Q, c'est-à-dire

$$Q = \frac{G(\alpha - x)}{b-y+c},$$

et qui est calculée en supposant cette poussée appliquée en N. Il est plus exact, pour vérifier l'équilibre de la voûte, de prendre la force Q' pour la poussée horizontale; mais les résultats différeront généralement très-peu de ceux que l'on obtiendrait en regardant cette poussée comme représentée par la force Q, conformément au n° 247.

254. En considérant maintenant le joint de rupture mn, on admettra également que la pression est nulle à l'arête supérieure m, où le joint tend à s'ouvrir, et qu'elle augmente uniformément depuis cette arête jusqu'en n, où cette poussée est à son maximum. z désignant toujours la hauteur mn du joint, K la valeur

maximum de la pression, v la distance d'un point quelconque de mn à l'extrémité supérieure n, on aura comme ci-dessus $\frac{Kvdv}{z}$ pour la pression supportée par un élément de la hauteur du voussoir. La condition à laquelle les pressions supportées par les divers éléments sont assujéties, est ici que leur somme soit égale à la pression normale exercée contre le joint par le poids G de la portion de voûte mnNM, et par la poussée horizontale Q. Cette somme étant $\frac{K}{z}\int_0^z vdv$, ou $\frac{1}{2}Kz$, on a donc l'équation

$$\tfrac{1}{2}Kz = G\sin.\theta + Q'\cos.\theta;$$

d'où

$$K = \frac{2(G\sin.\theta + Q'\cos.\theta)}{z},$$

formule qui fera connaître la valeur de la plus grande pression normale à laquelle la pierre est exposée sur l'unité superficielle, dans le joint de rupture. Cette valeur est double de celle qu'on trouverait, en supposant l'effort uniformément réparti dans toute la hauteur du joint.

255. En considérant enfin le joint AB, et admettant les suppositions indiquées dans le n° précédent, on reconnaît que l'expression précédente de K convient également à ce joint. G représente alors le poids total de la demi voûte ABNM; et si le joint dont il s'agit est horizontal, on a simplement

$$K = \frac{2G}{z}.$$

256. A l'égard des joints intermédiaires entre les

joints de rupture, les hypothèses précédentes ne peuvent pas s'y appliquer généralement avec exactitude; parceque lors même qu'une voûte est prête à se rompre, comme nous le supposons ici, ces joints ne tendent pas toujours à s'ouvrir, ensorte que l'on ne peut supposer nulle la pression exercée contre l'arête inférieure ou contre l'arête supérieure du joint. Pour les joints dont il s'agit, la pression se répartit d'une manière moins inégale dans toute la hauteur du plan de joint. Par conséquent si, en n'ayant point égard à cette remarque, on calculait pour ces joints la valeur de K par la formule du n° 254, le résultat surpasserait la véritable valeur de la pression normale à laquelle la pierre serait exposée. On conçoit d'ailleurs, à moins que la figure de la voûte ne soit très irrégulière, que si la pierre a une résistance suffisante à la clef, au joint de rupture, et aux joints inférieurs des piédroits, elle l'aura à plus forte raison dans toutes les autres parties.

257. On a supposé n° 252 que la voûte était en équilibre, ou prête à se rompre, et cette supposition était nécessaire pour que l'on pût regarder les joints de rupture comme prêts à s'ouvrir. Dans la réalité les voûtes ont toujours un excès de stabilité, au moyen duquel aucun joint ne s'ouvre, si ce n'est par l'effet de la compression des mortiers, circonstance dont on fait ici abstraction. La valeur de la poussée horizontale doit toujours se calculer d'après les règles établies précédemment. Les voussoirs se trouvant partout maintenus en contact sur toute la hauteur des plans de joint, on n'est plus assuré d'être d'accord avec les effets naturels en supposant la pression nulle à l'arête inférieure ou à l'arête supérieure du joint, et l'on doit

penser au contraire que la pression s'exerce sur toute la hauteur du joint, quoique moins fortement près de l'arête où le joint s'ouvrirait, si la voûte pouvait se rompre. La valeur totale de la pression exercée contre les plans de joint ne peut jamais surpasser d'ailleurs celle que l'on calculerait par les formules du n° 250. On conclut de ces remarques que, si l'on appliquait à une voûte où il y a excès de stabilité, les formules des n°s 252 et 254, les valeurs de K ainsi obtenues surpasseraient toujours celles des pressions exercées, et donneraient des limites dont les véritables pressions seraient d'autant plus éloignées que l'excès de stabilité de la voûte serait plus grand. Les moindres valeurs qu'il soit possible d'attribuer à K sont d'ailleurs celles que l'on obtiendrait en supposant les pressions uniformément réparties dans la hauteur des joints.

258. Lorsque les voussoirs ne sont pas posés immédiatement les uns contre les autres, et lorsque l'on décintre une voûte avant que les couches de mortier interposées dans les joints aient acquis une dureté suffisante, il peut y survenir des tas sements qui fassent ouvrir un certain nombre de joints près des points de rupture. Dans cette circonstance, la pierre peut être exposée à des efforts plus grands que ceux calculés d'après les n°s 252 et 254, parceque la pression doit être regardée comme nulle, non-seulement à l'une des extrémités du joint, mais sur une certaine portion de la hauteur de ce joint. Ces effets, que l'on doit tâcher de prévenir, ne paraissent pas susceptibles d'être ramenés à des termes précis, et soumis à un calcul exact.

De l'usage des tirants de fer pour consolider les voûtes en berceau.

259. Lorsque les piédroits d'une voûte ont trop peu de largeur pour qu'elle se maintienne en équilibre, cette voûte peut être consolidée au moyen de tirants en fer, placés dans les reins. L'usage de ces tirants est très-commun en Italie, où l'on en voit dans les édifices les plus magnifiques. Supposons que la voûte représentée fig. 40 tend à rompre dans le joint *mn*, les parties supérieures s'abaissant en s'appuyant l'une contre l'autre par l'arête N, et renversant les parties inférieures, contre lesquelles elles portent par les arêtes *m*, et qu'elles tendent à faire tourner sur les arêtes B. On préviendra la rupture de cette voûte en liant les deux moitiés par un tirant horizontal. Il convient de placer ce tirant immédiatement au dessous du joint de rupture *mn*. En effet, quand la voûte commence à se rompre, les points *m* sont ceux qui parcourent horizontalement le plus grand espace. Or on peut s'opposer à cette rupture au moyen d'une force horizontale, dont le moment, c'est-à-dire le produit de la force et de l'espace parcouru dans le sens de cette force par son point d'application, doit avoir une valeur déterminée, pour rendre nulle la somme des moments des forces qui agissent sur chaque moitié de la voûte. On doit donc appliquer cette force dans la direction *mm*, puisque l'espace parcouru par le point d'application étant alors le plus grand possible, la force sera la moindre possible.

On connaîtra d'ailleurs la tension qui peut s'établir dans le tirant, en remarquant que le moment de cette tension ajouté au moment du poids de la demi

voûte ABMN, doit être égal au moment de la poussée horizontale qui s'exerce en N; tous ces moments étant pris par rapport à l'arête B.

260. Lorsque l'épaisseur d'une voûte et de ses piédroits est très-petite par rapport à l'ouverture, il est possible qu'un seul tirant ne suffise pas pour en prévenir la rupture. On le vérifiera en considérant à part les portions de voûte AB*mn*, *mn*NM, et appliquant à chacune les règles énoncées précédemment. Si ces portions de voûte n'étaient pas en équilibre, on devrait y placer de nouveaux tirants, à la hauteur des joints où la rupture tendrait à s'opérer, en déterminant, d'après ce qui vient d'être dit, les efforts auxquels ces tirants se trouveraient exposés.

261. Les tirants, employés de la manière qui vient d'être expliquée, sont exposés à être rompus par suite de l'abaissement de la température, et on doit en régler la grosseur de manière à prévenir cet effet. On nommera

t la tension du tirant lorsque la température est le plus élevée;

ω l'aire de la section transversale du tirant;

l la longueur du tirant;

λ la variation absolue de cette longueur, pour un abaissement donné de la température (*a*);

R' la plus grande tension à laquelle on veut que le fer soit exposé, rapportée à l'unité superficielle.

E aura la signification indiquée n° 47.

(*a*) Cette variation se calculera en remarquant que le fer forgé s'allonge ou s'accourcit, pour une variation de température de 100° du thermomètre centigrade, de 0,00122; le fer fondu, de 0,00111; le bois de sapin, de 0,0008.

Le fer ayant du s'accourcir de la quantité λ, se trouve dans le même cas que si l'on avait exercé sur lui un effort capable de l'allonger de la même quantité, effort qui serait exprimé par $E\omega.\frac{\lambda}{l}$. Par conséquent, par l'effet de l'abaissement de la température, la tension primitive t est devenue

$$t + E\omega.\frac{\lambda}{l}.$$

La section ω doit donc être déterminée de manière que l'on ait

$$R'\omega = t + E\omega.\frac{\lambda}{l}, \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{t}{R' - E\frac{\lambda}{l}}.$$

On voit qu'il est impossible de remplir la condition que l'effort exercé sur l'unité superficielle, ne dépasse pas R', si l'abaissement de la température est tel que l'on ait $\frac{\lambda}{l} = \frac{R'}{E}$. Les valeurs qui doivent être attribués pour le fer forgé à E et à R' ont été indiquées nos 70 et 125.

De l'équilibre des voûtes en dôme.

262. L'équilibre des voûtes en dôme diffère principalement de l'équilibre des voûtes en berceau, en ce que, dans ces dernières, le renversement comporte seulement les disjonctions dans les joints indiquées dans les nos précédents. Il n'est pas nécessaire, pour que la voûte se rompe, qu'il se forme aucune autre disjonction, suivant des plans perpendiculaires à la longueur de cette voûte. Une voûte sphérique, au contraire, ne peut-être renversée, sans que les joints ne

s'ouvrent comme dans les voûtes cylindriques, et en outre sans qu'il ne se forme des lézardes dans la direction des plans méridiens. La formation de ces lézardes exige que la cohésion des mortiers soit détruite. La rupture de la voûte exigerait de plus une sorte de désunion et de déplacement relatif des pierres voisines, tels que, si ces pierres étaient grandes, appareillées avec soin, et posées à joints croisés, elles devraient être en parties cassées pour que cette rupture pût avoir lieu. Il est difficile d'évaluer, avec une exactitude suffisante, l'effet de la cohésion des mortiers, et surtout l'effet de la résistance des pierres. Mais il paraît convenable de n'avoir pas égard à ces deux circonstances lors de l'établissement d'une grande voûte (*a*). Nous regarderons ici une voûte sphérique comme partagée en un grand nombre de parties séparées par les plans méridiens, et n'ayant entre elles aucune liaison.

263. D'après cela, tout ce qu'on a dit ci-dessus sur l'équilibre des voûtes en berceau pourra s'appliquer aux voûtes en dôme, avec cette seule différence qu'au

---

(*a*) Il résulte des calculs des PP. Lesueur, Jacquier et Boscowich, que, abstraction faite de l'adhésion des mortiers, le moment des forces agissantes pour le renversement de la coupole de Saint-Pierre de Rome, est au moment des forces résistantes, dans le rapport de 3 à 2 environ. (*Parere di tre matematici sopra i danni che si sono trovati nella cupola di S. Pietro al fine dell' anno* 1742.) Cette coupole est presque entièrement construite en brique, avec du mortier du pouzzolane. L'adhésion des matériaux a suffi long-temps pour maintenir l'équilibre. Mais des lézardes produites par de petits mouvements imprimés par la chûte de la foudre et les tremblements de terre, s'étant multipliées et ayant augmenté peu à peu, les progrès de ces dégradations ont dû être arrêtés en entourant les parties inférieures du dôme par des cercles en fer.

lieu de considérer des portions de voûte comprises entre des plans verticaux parallèles, on devra considérer l'assemblage d'un très-grand nombre de portions de voûte, comprises entre des plans verticaux qui forment entre eux un très-petit angle, et se coupent suivant l'axe du dôme. L'équilibre de chacune de ces portions de voûte devra être vérifié, d'après les règles exposées précédemment. Mais il est indifférent de considérer à part une de ces portions, ou d'établir le calcul en considérant à la fois la totalité du dôme. La fig. 41 représentant le plan d'une voûte sphérique, on peut également vérifier l'équilibre d'une portion BOB′ comprise entre deux plans méridiens très-voisins, ou celui de la moitié *b*BB′*b*′ de cette voûte. En adoptant ce dernier parti, on imaginera qne la demi circonférence *b*BB′*b*′ a été développée en *6*BB′*6*′, et que tous les autres éléments demi circulaires de la voûte ont été également développés sur les arêtes du cylindre horizontal, qui les toucherait dans la section méridienne projetée en BOB′. Il en résultera une portion de voûte en berceau, comprise entre les plans verticaux *6*O*6*′, *6*O*6*′, à laquelle on appliquera les règles exposées dans les nos 240 et suivants. On remarquera d'ailleurs, en déterminant le poids et la position du centre de gravité des diverses parties, que cette portion de voûte est contenue entre deux plans verticaux inclinés par rapport à l'axe du cylindre, ensorte que les éléments horizontaux ont d'autant moins de longueur qu'ils sont plus voisins du sommet, où leur longueur est nulle.

Il est évident que s'il existe des portes ou des fenêtres dans les parties inférieures du dôme, on doit supposer des vides correspondants dans la portion

de voûte en berceau 6O6′, dont les conditions d'équilibre sont les mêmes que celles de ce dôme.

264. Lorsqu'une voûte en dôme est en équilibre, on peut la couper suivant un plan horizontal, et en retrancher la partie supérieure, sans que l'équilibre cesse de subsister. Si, par exemple, on a enlevé la portion *mn*NM (Fig. 34), et que l'on considère la partie restante AB*nm* d'une portion du dôme comprise entre deux plans méridiens très-voisins, il peut arriver, ou que cette portion se soutiendrait d'elle-même, ou qu'il serait nécessaire, pour qu'elle se soutînt, que l'on appliquât une force horizontale en *n*. Dans le dernier cas, il s'établit entre les voussoirs, vers l'extrémité supérieure de la partie restante AB*mn*, et perpendiculairement aux joints verticaux, des pressions horizontales qui n'existent point lorsque la voûte est entière.

265. Si une voûte en dôme était effectivement formée d'un grand nombre de parties séparées par les plans méridiens, et sans liaison entre elles, on ne pourrait la couper suivant ces plans et en supprimer une partie, sans en causer la rupture. Ainsi les grandes niches, ou hémicycles, ne se soutiennent que par l'effet de la liaison des matériaux, ou parceque le mur de face offre une stabilité suffisante pour résister à l'action latérale de la demi voûte.

De l'usage des ceintures en fer pour consolider les voûtes en dôme.

266. L'utilité de ces armatures est prouvée par un grand nombre d'exemples (*a*). Les mêmes considéra-

(*a*) Voyez le deuxième livre des *Memorie istoriche della gran cu-*

tions, présentées n° 259, montrent que les cercles doivent être placés de préférence à la hauteur du joint de rupture. En désignant par t la tension d'un cercle, cette tension produit l'effet d'une force horizontale égale à

$$2\pi . t,$$

qui serait distribuée uniformément dans tous les points de la circonférence du cercle, et perpendiculairement à cette circonférence. Par conséquent si, pour calculer l'équilibre d'une voûte en dôme, on la concevait remplacée par une voûte en berceau, de la manière expliquée n° 263, il faudrait concevoir les deux moitiés de cette voûte réunies l'une à l'autre par un ou plusieurs tirants, dont la tension ou la somme des tensions serait égale à πt.

La proposition précédente se conclut de ce qui a été dit n° 227. On peut s'en rendre raison directement, en remarquant que, d'après le principe des vitesses virtuelles, l'équilibre des forces appliquées dans le sens des rayons et de la force appliquée dans le sens de la circonférence, exige que les premières soient à la seconde comme une variation très-petite de la circonférence est à une variation correspondante du rayon; c'est-à-dire comme la circonférence est au rayon.

Les considérations exposées n° 260 et 261 s'appliquent également aux cercles employés pour consolider les dômes.

---

pola del tempio Vaticano, de Poleni, où l'auteur cite plusieurs dômes réparés et consolidés au moyen de cercles en fer. Le dôme intérieur et le cône qui supporte la lanterne, à Saint-Paul de Londres, sont consolidés de la même manière.

De l'équilibre des voûtes en arc de cloître et des voûtes d'arête.

267. Les figures 42 et 43 représentent le plan d'une voûte en arc de cloître, élevée sur une base polygonale. On peut supposer cette voûte partagée, par des plans verticaux passant par les angles du polygone, en parties qui ne sont pas liées les unes aux autres; et considérer à part deux parties opposées, BOB', BOB', comme une portion de voûte en berceau. On appliquera à cette portion de voûte les règles exposées dans les nos 240 et suivants, en ayant toujours égard, dans l'évaluation des volumes et la détermination des centres de gravité, à ce qu'elle est comprise entre des plans inclinés par rapport à l'axe du berceau. Dans la réalité les parties de la voûte sont liées entre elles, soit par l'adhésion des mortiers, soit parce qu'on place ordinairement dans les arêtes des chaînes en pierre plus fortes, qui devraient être désunies et cassées pour que la rupture s'opérât. L'effet de ces liaisons est ici plus sensible qu'il ne l'est dans les dômes, et d'autant plus que la base de la voûte est un polygone d'un moindre nombre de côtés. Mais cet effet n'étant pas de nature à être évalué avec exactitude, il ne paraît pas que l'on doive y avoir égard, surtout dans l'établissement d'une grande voûte.

268. L'équilibre d'une voûte d'arête (Fig. 44) peut être considéré de la même manière, en la supposant partagée en parties indépendantes l'une de l'autre par les plans verticaux BOB', BOB'. Les portions BOB, B'OB' appartiennent à une même voûte en berceau, et tendent à se rompre, en renversant les piliers sur

les arêtes Bb, B'b'. On remarquera qu'ici les éléments horizontaux de ces portions de voûte ont plus de longueur à mesure qu'ils sont plus rapprochés du sommet. La poussée horizontale, par cette raison, est plus grande, à épaisseur égale, qu'elle ne l'est dans les voûtes en arc de cloître, où le contraire a lieu. Mais on voit, d'un autre côté, que les piliers sont chargés du poids des deux autres portions de voûte BOB', BOB', et qu'ils ne peuvent être renversés sans entraîner dans leur mouvement ces portions de voûte, dont le moment, pris par rapport aux arêtes Bb, B'b', doit être réuni au moment de stabilité des moitiés des portions BOB, B'OB', pris par rapport aux mêmes arêtes. Les voûtes dont il s'agit diffèrent en cela de celles en arc de cloître, où, dans le cas d'une rupture, les parties seraient renversées séparément, et ne sont pas consolidées les unes par les autres. Les remarques faites ci-dessus sur l'effet des liaisons des parties de la voûte, trouvent également ici leur application.

ARTICLE IV.

Des calculs relatifs à l'établissement des voûtes.

269. Les calculs indiqués dans l'article précédent ont pour objet l'évaluation des volumes des parties des voûtes, et la recherche des situations des centres de gravité de ces parties, ou plutôt des distances horizontales des centres de gravité à un plan donné. Quand il s'agit d'une voûte en berceau comprise entre deux plans verticaux perpendiculaires à l'axe de cette voûte, le calcul est en général établi pour une unité de

longueur de la voûte, et l'on a seulement à considérer les aires des parties de la section transversale. Dans d'autres cas, et spécialement dans les calculs relatifs à l'établissement des dômes, des voûtes en arc de cloître et des voûtes d'arête, on doit considérer les volumes des parties de la voûte.

La figure de la section transversale d'une voûte étant ordinairement formée par des lignes droites, des arcs de cercle ou d'autres courbes dont on a les équations, on peut effectuer rigoureusement les calculs dont il s'agit, d'après les règles que la géométrie fournit à cet effet (*a*). Mais il sera plus simple, comme l'a remarqué Coulomb (*b*), d'employer des méthodes d'approximation.

La figure dont il s'agit peut toujours être décomposée en parties telles que ABMN (Fig. 45), comprises entre deux lignes verticales et deux lignes courbes ou droites. Si la voûte est terminée par deux plans verticaux perpendiculaires à l'axe, il suffit de considérer l'aire ABNM. Si cette voûte est terminée par deux plans verticaux CQ, C'Q' inclinés sur cet axe, il faudra considérer le volume correspondant à l'aire ABNM, et projeté horizontalement en CC' Q'Q. Cela posé, nommons

x l'abscisse Ap;
y la longueur mn;
z la longueur qq';
X l'abscisse AP;

(*a*) M. Audoy a établi de cette manière les formules relatives aux diverses espèces de voûtes en berceau. Voyez son Mémoire dans le Mémorial du génie, n° 4.

(*b*) Mémoires des savants étrangers, 1773.

et regardons y et z comme des fonctions de x. Si nous considérons seulement l'aire ABNM, nous aurons

$$\int_0^X y\,dx$$

pour la valeur de cette aire; et

$$\frac{\int_0^X xy\,dx}{\int_0^X y\,dx}$$

pour la distance horizontale de son centre de gravité à la ligne AB. Si nous considérons le volume projeté en CC'Q'Q, nous aurons

$$\int_0^X yz\,dx$$

pour valeur de ce volume; et

$$\frac{\int_0^X xyz\,dx}{\int_0^X yz\,dx}$$

pour la distance horizontale de son centre de gravité au plan vertical dont CC' est la trace.

270. On voit, par ce qui précède, que les calculs dont il s'agit se réduisent toujours à l'évaluation d'intégrales définies, exprimées généralement par

$$\int_0^X dx.\mathrm{F}x.$$

Or on a, pour exprimer la valeur de ces intégrales, les formules approchées suivantes. Supposant l'intervalle AP ou X partagé en un certain nombre n de parties, et désignant par ω la longueur de l'une de ces parties, en sorte que $X = n\omega$, on aura

$$\int_0^X dx.Fx = \frac{\omega}{6}\left[F0 + 4F\tfrac{1}{2}\omega + 2F\omega + 4F\tfrac{3}{2}\omega + \ldots + 4F(X - \tfrac{1}{2}\omega) + FX\right]$$
$$- \frac{\omega^4}{2880}\left(\frac{d^3F_X}{dx^3} - \frac{d^3F_0}{dx^3}\right);$$

ou bien

$$\int_0^X dx.Fx = \omega\left[F\tfrac{1}{2}\omega + F\tfrac{3}{2}\omega + F\tfrac{5}{2}\omega + \ldots + F(X - \tfrac{1}{2}\omega)\right]$$
$$+ \frac{\omega^2}{24}\left(\frac{dF_X}{dx} - \frac{dF_0}{dx}\right) - \frac{7\omega^4}{5760}\left(\frac{d^3F_X}{dx^3} - \frac{d^3F_0}{dx^3}\right) + \text{etc.}$$

$\frac{dF_X}{dx}$, $\frac{dF_0}{dx}$ représentent les valeurs que prendra la fonction $\frac{d.Fx}{dx}$ lorsque $x = X$ et $x = 0$ (*a*). La seconde de ces formules comporte le calcul de deux fois moins de termes que la première. Elle suppose la nature de la fonction Fx telle, que les coëfficients différentiels $\frac{d.Fx}{dx}$, $\frac{d^3.Fx}{dx^3}$, etc., ne deviennent pas infinis pour des valeurs de x comprises entre 0 et X; par exemple, que la tangente de la courbe dont Fx représente l'ordonnée ne soit point, dans cet intervalle, perpendiculaire à l'axe des x. Quand cette condition n'est pas remplie, on doit considérer à part les portions de la courbe

(*a*) Voyez la démonstration de ces formules dans les Exercices de calcul intégral de M. Legendre, tome I, page 308.

voisines du point où la tangente est perpendiculaire à l'axe des abscisses, et en calculer l'aire séparément. On doit prendre la distance ω assez petite pour que le terme affecté de ω^4 puisse être négligé. On peut, dans les opérations relatives à l'établissement des voûtes, mesurer, sur des dessins faits avec exactitude, les longueurs des lignes représentées par y et z dans le n° précédent, ce qui abrégera beaucoup ces opérations.

QUATRIÈME SECTION.

DE L'ÉQUILIBRE ET DE L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS EN CHARPENTE.

271. Les constructions en charpente consistent généralement dans un système de pièces assujetties les unes aux autres, aux extrémités seulement, ou dans divers points de la longueur. Ces constructions offrent des propriétés différentes, suivant qu'elles sont supportées par-dessous, ou suspendues à des points fixes plus élevés que la construction. Il est toujours nécessaire que l'équilibre du système soit stable; mais, dans le premier cas, cette condition ne peut être remplie qu'autant que la figure de ce système est invariable; dans le second cas, l'équilibre sera toujours stable, lors même que la construction serait parfaitement flexible.

Le principe le plus général dont on puisse faire dépendre la disposition d'un système de charpente, consiste en ce que les pièces principales doivent être placées suivant des lignes droites tracées des points où s'exercent les efforts aux points d'appui. Dans une

construction ainsi disposée, les efforts qu'elle supporte ne tendent point à en changer la figure en faisant tourner les pièces sur les assemblages placés à leurs extrémités. Ce principe est principalement applicable aux constructions soutenues par-dessous.

Chaque pièce d'une construction en charpente doit offrir une résistance proportionnée aux efforts qu'elle peut avoir à supporter.

ARTICLE PREMIER.

De la résistance d'une pièce prismatique posée horizontalement, chargée et supportée de diverses manières.

272. Les résultats présentés dans les n°s 55 et suivants font connaître les conditions de l'équilibre pour une pièce prismatique, dans les cas les plus simples. Cette pièce étant encastrée à une extrémité (Fig. 5 et 7), chargée à l'autre extrémité d'un poids P, et sur chaque unité de la longueur d'un poids p, on a (n°s 55 et 58)

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{c^3}{3} + \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{c^4}{8}$$

pour l'abaissement BM de l'extrémité libre; c étant la longueur AM, et ε le moment d'élasticité dont l'expression générale est donnée n° 50.

273. Lorsqu'une pièce est posée librement sur deux appuis (Fig. 6 et 8), chargée au milieu du poids 2P, et sur chaque unité de longueur d'un poids p, on a (n°s 56 et 59)

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{c^3}{3} + \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{5c^4}{24}$$

pour l'abaissement CA du milieu du solide ; c étant la moitié AM de l'intervalle des appuis.

274. Les résultats présentés dans les nos 82 et suivants font connaître les conditions de l'équilibre pour une pièce prismatique, chargée de la même manière, dans le cas de la rupture. D'après les nos 82, 84 et 87, lorsqu'un solide est encastré horizontalement à une extrémité, chargé à l'autre d'un poids P, et sur chaque unité de longueur du poids p; ou bien quand un solide est posé horizontalement sur deux appuis, chargé au milieu du poids 2P, et sur chaque unité de longueur du poids p; on a également (en négligeant la considération de la courbure du solide)

$$\rho = P + \tfrac{1}{2} p c^2,$$

c représentant la longueur du solide dans le premier cas, ou la moitié de l'intervalle des appuis dans le second. ρ est le moment de rupture dont l'expression générale est donnée nos 75 et 76.

275. Lorsque la figure que prend un solide prismatique par l'effet de la flexion est connue, on en déduit immédiatement les conditions de l'équilibre relatives au cas de la rupture. Le solide tend à se rompre dans le point où la courbure est la plus grande ; et quand il est prêt à se rompre le moment de la résistance à la flexion, en ce point, est égal au moment de la résistance à la rupture. Ainsi les conditions d'équilibre dont il s'agit s'obtiennent en égalant ρ à la valeur maximum de $\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2}$; x et y étant l'abscisse et l'ordonnée de la courbe du solide, ε ayant la signification indiquée n° 55, et ρ la signification indiquée n° 82.

Équilibre d'une pièce posée sur deux appuis, et chargée en un point quelconque de l'intervalle des appuis.

276. On suppose qu'un solide MM' (Fig. 46), posé sur deux appuis placés sur une même ligne horizontale, est chargée d'un poids 2P suspendu au point B, qui n'est pas placé au milieu de l'intervalle des appuis. Il s'agit de connaître les conditions d'équilibre du solide par rapport à la flexion et par rapport à la rupture. On nommera

c la moitié CM de l'intervalle des appuis;
z la distance CD;
x l'abscisse Bp;
y l'ordonnée mp;
f l'abaissement BD du point B;
ω l'angle que la tangente à la courbe du solide forme au point B avec l'horizon.
ε aura la signification indiquée n° 55,
ρ aura la signification indiquée n° 82.

Les composantes du poids 2P, représentant les efforts exercés sur les appuis M et M', sont respectivement

$$P\frac{c+z}{c} \quad \text{et} \quad P\frac{c-z}{c};$$

et chaque partie BM, BM' du solide est fléchie de la même manière que si, étant encastrées en B, elles étaient sollicitées aux extrémités M et M' par ces composantes. On aura donc ici comme au n° 55, pour la partie BM,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{\varepsilon}.\frac{c+z}{c}(c-z-x),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{c+z}{c}\left[(c-z)x-\frac{x^2}{2}\right]+\text{tang.}\,\omega,$$

$$y=\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{c+z}{c}\left[(c-z)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]+x\,\text{tang.}\,\omega,$$

$$f=\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{(c+z)(c-z)^3}{3c}+(c-z)\,\text{tang.}\,\omega.$$

On aura également pour la partie BM'

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{c-z}{c}(c+z-x),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{c-z}{c}\left[(c+z)x-\frac{x^2}{2}\right]-\text{tang.}\,\omega,$$

$$y=\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{c-z}{c}\left[(c+z)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]-x\,\text{tang.}\,\omega,$$

$$f=\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{(c-z)(c+z)^3}{3c}-(c+z)\,\text{tang.}\,\omega.$$

f et tang. ω devant avoir les mêmes valeurs dans ces équations, on trouvera, par l'élimination,

$$\text{tang.}\,\omega=\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{2(c^2-z^2)z}{3c},\quad f=\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{(c^2-z^2)^2}{3c}.$$

277. Les équations des parties BM et BM' de la courbe sont respectivement

$$y=\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{c+z}{c}\left[\tfrac{2}{3}(c-z)zx+\tfrac{1}{2}(c-z)x^2-\tfrac{1}{6}x^3\right],$$

$$y=\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{c-z}{c}\left[-\tfrac{2}{3}(c+z)zx+\tfrac{1}{2}(c+z)x^2-\tfrac{1}{6}x^3\right].$$

On connaîtra l'ordonnée minimum en faisant dans la seconde de ces équations $\frac{dy}{dx}=0$, ce qui donnera

$$x=c+z-\sqrt{c^2+\tfrac{2}{3}cz-\tfrac{1}{3}z^2}.$$

En appelant y_1, la valeur de y correspondante à cette valeur de x, la flèche de la courbe du solide sera $f - y_1$. Le point B est celui où la courbure du solide est la plus grande, et où ce solide tend à se rompre : on le nommera *point de rupture*.

278. D'après cette dernière remarque, et conformément au n° 275, les conditions de l'équilibre relatif à la rupture seront exprimées par l'équation

$$\rho = P \cdot \frac{c^2 - z^2}{c}.$$

On le voit aussi en remarquant que ρ doit être égal au moment de l'une ou l'autre des forces agissant en M, M', pris par rapport au point de rupture B.

Équilibre d'une pièce posée sur deux appuis, et chargée sur une portion de sa longueur.

279. Le solide MM' (Fig. 47), posé sur deux appuis placés sur une même ligne horizontale, étant chargé, dans l'intervalle NN' seulement, d'un poids p sur l'unité de longueur, on demande les conditions de l'équilibre. Supposant que le point B est au milieu de l'intervalle NN', on nommera

z la distance CD;

c la moitié CM de la distance des appuis;

c' la moitié DE de l'intervalle dans lequel est placée la charge;

x, y l'abscisse Bp et l'ordonnée mp;

f l'abaissement BD ou MP du point B;

ω l'angle que la tangente à la courbe au point B forme avec l'horizon;

ε et ρ auront les significations indiquées n° 276.

Les composantes de la charge $2pc'$ représentant les efforts exercés sur les appuis M et M' sont respectivement

$$pc'.\frac{c+z}{c} \text{ et } pc'.\frac{c-z}{c}.$$

Chaque partie BM, BM' du solide est fléchie de la même manière que si, étant encastrée en B, elle était sollicitée dans un sens par les poids placés en BN, BN', et dans l'autre sens par les forces précédentes agissant en M, M'. Par conséquent on aura d'abord, pour tous les points compris entre B et N (voyez les nos 56, 58 et 59),

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{pc'}{\varepsilon}.\frac{c+z}{c}(c-z-x)-\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{c'^2}{2}-c'x+\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{pc'}{\varepsilon}.\frac{c+z}{c}\left[(c-z)x-\frac{x^2}{2}\right]-\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{c'^2x}{2}-\frac{c'x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\text{tang.}\,\omega,$$

$$y=\frac{pc'}{\varepsilon}.\frac{c+z}{c}\left[(c-z)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]-\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{c'^2x^2}{4}-\frac{c'x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)+x\,\text{tang.}\,\omega;$$

et les deux dernières équations donneront, pour les valeurs qui conviennent au point N, en y faisant $x=c'$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{pc'}{\varepsilon}.\frac{c+z}{c}\left[(c-z)c'-\frac{c'^2}{2}\right]-\frac{p}{\varepsilon}.\frac{c'^3}{6}+\text{tang.}\,\omega,$$

$$y=\frac{pc'}{\varepsilon}.\frac{c+z}{c}\left[(c-z)\frac{c'^2}{2}-\frac{c'^3}{6}\right]-\frac{p}{\varepsilon}.\frac{c'^4}{8}+c'\,\text{tang.}\,\omega.$$

On aura ensuite pour tous les points compris entre N et M, en déterminant les constantes de manière que

pour $x=c'$ les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et y soient égales aux précédentes,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{pc'}{\varepsilon}.\frac{c+z}{c}(c-z-x),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{pc'}{\varepsilon}.\frac{c+z}{c}\left[(c-z)x-\frac{x^2}{2}\right]-\frac{p}{\varepsilon}.\frac{c'^3}{6}+\text{tang.}\,\omega,$$

$$y=\frac{pc'}{\varepsilon}.\frac{c+z}{c}\left[(c-z)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]-\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{c'^3x}{6}-\frac{c'^4}{24}\right)+x\,\text{tang.}\,\omega.$$

La dernière équation, en supposant $x=c-z$, donnera

$$f=\frac{pc'}{\varepsilon}.\frac{(c+z)(c-z)^3}{3c}-\frac{p}{\varepsilon}\left[\frac{c'^3(c-z)}{6}-\frac{c'^4}{24}\right]+(c-z)\,\text{tang.}\,\omega.$$

En répétant les mêmes opérations pour la portion BM′ du solide, on trouvera

$$f=\frac{pc'}{\varepsilon}.\frac{(c-z)(c+z)^3}{3c}-\frac{p}{\varepsilon}\left[\frac{c'^3(c+z)}{6}-\frac{c'^4}{24}\right]-(c+z)\,\text{tang.}\,\omega;$$

et en éliminant entre ces deux équations, il vient

$$\text{tang.}\,\omega=\frac{pc'}{\varepsilon}.\frac{(4c^2-4z^2-c'^2)z}{6c};$$

$$f=\frac{pc'}{\varepsilon}\left[\frac{(2c^2-2z^2-c'^2)(c^2-z^2)}{6c}+\frac{c'^3}{24}\right].$$

280. On aura les équations des parties BN, NM de la courbe, en substituant dans les expressions précédentes de y qui appartiennent respectivement à ces parties la valeur que l'on vient d'obtenir pour tang. ω. Les expressions de y qui conviennent aux portions BN′, N′M′ de la courbe sont semblables aux expressions qui se rapportent aux portions BN, NM : on les

déduit de ces dernières en changeant $c+z$ en $c-z$, et réciproquement. On connaîtra donc également la figure de la portion BM du solide. La flèche de la courbure se trouvera de la manière indiquée n° 277.

281. Le point B est celui dans lequel la courbure est la plus grande, et où le solide tend à se rompre. La condition de l'équilibre relatif à la rupture est exprimée, conformément au n° 275, par l'équation

$$\rho = pc'\left(\frac{c^2-z^2}{c}-\frac{c'}{2}\right).$$

282. Les exemples précédents suffisent pour indiquer comment on trouve les conditions d'équilibre d'une pièce posée horizontalement sur deux appuis, et chargée d'une manière quelconque. Le point où elle tend à se rompre, et que l'on doit regarder comme le point d'encastrement, est toujours situé dans la verticale contenant le centre de gravité des poids dont cette pièce est chargée. Le point de rupture ayant été déterminé, aussi bien que les efforts exercés sur chaque point d'appui, on doit former autant d'équations différentielles du second ordre qu'il y a, de chaque côté du point de rupture, de parties pour lesquelles les conditions de la flexion ne peuvent s'exprimer par la même formule. Les constantes introduites par l'intégration se déterminent de manière que l'ordonnée et l'inclinaison de la tangente aient les mêmes valeurs dans le point commun à deux parties consécutives.

L'équation exprimant les conditions de l'équilibre à l'instant où la pièce est prête à se rompre, s'obtient en égalant le moment de rupture ρ à la valeur de $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}$ qui

appartient au point de rupture; c'est-à-dire au moment pris par rapport à ce point des forces agissant sur la pièce dans l'une ou l'autre des parties que ce point sépare.

Équilibre d'une pièce chargée d'un poids, dont l'une des extrémités est encastrée et l'autre posée sur un appui.

283. La pièce AMM' (Fig. 48) encastrée horizontalement à l'extrémité A, supportée à l'extrémité M' sur un appui placé sur la même ligne horizontale que le point A, étant chargée en M du poids Π, on nommera

c la distance AB;
c' la distance AM';
Π' l'effort exercé sur l'appui M';
ε et ρ auront les significations indiquées n° 276.

On aura en premier lieu, pour la portion AM de la pièce,

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=\Pi(c-x)-\Pi'(c'-x),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=\Pi\left(cx-\frac{x^2}{2}\right)-\Pi'\left(c'x-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y=\Pi\left(\frac{cx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-\Pi'\left(\frac{c'x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right),$$

On aura ensuite pour la portion MM', en déterminant les constantes de manière que, pour $x=c$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et y soient égales à celles qui seraient données par les équations précédentes,

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=-\Pi'(c'-x),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=\Pi\frac{c^2}{2}-\Pi'\left(c'x-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon\, y=\Pi\left(\frac{c^2x}{2}-\frac{c^3}{6}\right)-\Pi'\left(\frac{c'x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right).$$

284. Cette dernière expression de y devant être nulle quand $x=c'$, on aura

$$\Pi'=\Pi\frac{c^2(3c'-c)}{2c'^3}$$

pour l'effort exercé sur le point d'appui M'. En substituant cette valeur dans les équations précédentes, on trouvera pour l'abscisse du point où l'ordonnée y est la plus grande

$$c'\left(1-\sqrt{\frac{c'-c}{3c'-c}}\right);$$

et pour la valeur de cette plus grande ordonnée, ou de la flèche de courbure de la pièce,

$$\frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{c^2}{6}(c'-c)\sqrt{\frac{c'-c}{3c'-c}}.$$

285. On a au point A

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=\Pi c-\Pi' c'=\Pi\frac{c(c^2-3cc'+2c'^2)}{2c'^2};$$

et au point M,

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=-\Pi' c'=\Pi\frac{c(3cc'-c^2)}{2c'^2}.$$

C'est au point A que la courbure est la plus grande,

et que la pièce tend à se rompre. L'équilibre est exprimé à l'instant de la rupture par l'équation

$$\rho = \Pi \frac{c(c^2 - 3cc' + 2c'^2)}{2c'^2}.$$

286. Si l'on suppose le poids Π placé au milieu de l'intervalle AM', on aura $c' = 2c$; et en écrivant $2P$ au lieu de Π, il viendra

$$\Pi' = \tfrac{5}{8} P$$

pour l'effort exercé sur le point d'appui. L'abscisse du point où l'ordonnée est la plus grande sera

$$2c\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right);$$

et la valeur de cette ordonnée,

$$\frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{c^3}{3\sqrt{5}}.$$

En comparant ce résultat à celui du n° 56, on voit que la flèche de courbure produite par le même poids est plus petite, dans le rapport de 1 à $\sqrt{5}$, qu'elle ne serait si les deux extrémités de la pièce étaient posées sur des appuis.

L'ordonnée du point milieu, où le poids est placé, est $\frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{7c^3}{48}$, c'est-à-dire les $\frac{7}{16}$ de ce qu'elle serait dans le cas dont on vient de parler.

287. En supposant toujours le poids Π placé au milieu de l'intervalle AM', la formule du n° 285 deviendra

$$\rho = P \frac{3c}{4}.$$

Si les deux extrémités étaient posées sur deux appuis, on aurait $\rho = Pc$. Par conséquent lorsque l'une des extrémités est encastrée, la pièce, à force égale, peut supporter un poids plus grand dans le rapport de 4 à 3.

Équilibre d'une pièce dont les deux extrémités sont encastrées, et qui est chargée d'un poids.

288. On suppose la pièce AMM' (Fig. 49) chargée en M du poids Π, encastrée horizontalement aux deux extrémités A et M'; et l'on remarque que l'effet de l'encastrement en M' est de rendre horizontale en ce point la direction de la tangente à la courbe. Or on ne changera rien à l'état d'équilibre de la pièce AM', si l'on suppose cet effet produit au moyen de ce que cette pièce, posée simplement sur un appui en M', est prolongée en M'M", et chargée à l'extrémité M" d'un poids dont la valeur a été convenablement déterminée. Cela posé, on nommera

c la distance AB,
c' la distance AM',
c'' la distance AB",
Π' l'effort exercé sur l'appui M',
Π'' le poids suspendu à l'extrémité M",
ε et ρ auront les significations indiquées n° 276.

On aura en premier lieu pour la portion AM de la pièce,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(c-x) - \Pi'(c'-x) + \Pi''(c''-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi(cx - \tfrac{1}{2}x^2) - \Pi'(c'x - \tfrac{1}{2}x^2) + \Pi''(c''x - \tfrac{1}{2}x^2),$$

$$\varepsilon y = \Pi(\tfrac{1}{2}cx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) - \Pi'(\tfrac{1}{2}c'x^2 - \tfrac{1}{6}x^3) + \Pi''(\tfrac{1}{2}c''x^2 - \tfrac{1}{6}x^3);$$

On a ensuite pour la portion MM', en déterminant les constantes de manière que, pour $x=c$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et y soient égales à celles qui seraient données par les équations précédentes,

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=-\Pi'(c'-x)+\Pi''(c''-x),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=\Pi\tfrac{1}{2}c^2-\Pi'(c'x-\tfrac{1}{2}x^2)+\Pi''(c''x-\tfrac{1}{2}x^2),$$

$$\varepsilon y=\Pi(\tfrac{1}{2}c^2x-\tfrac{1}{6}c^3)-\Pi'(\tfrac{1}{2}c'x^2-\tfrac{1}{6}x^3)+\Pi''(\tfrac{1}{2}c''x^2-\tfrac{1}{6}x^3).$$

289. Le coëfficient $\frac{dy}{dx}$ et l'ordonnée y devant être nuls au point M', c'est-à-dire quand $x=c'$, on a

$$0=\Pi\tfrac{1}{2}c^2-\Pi'\tfrac{1}{2}c'^2+\Pi''(c'c''-\tfrac{1}{2}c'^2),$$
$$0=\Pi(\tfrac{1}{2}c^2c'-\tfrac{1}{6}c^3)-\Pi'\tfrac{1}{3}c'^3+\Pi''(\tfrac{1}{2}c'^2c''-\tfrac{1}{6}c'^3);$$

d'où l'on tire

$$\Pi'=\Pi\frac{c^2(cc'-2cc''-2c'^2+3c'c'')}{c'^3(c''-c')},\qquad \Pi''=\Pi\frac{c^2(c'-c)}{c'^2(c''-c')}.$$

En mettant ces valeurs dans les formules précédentes, on connaîtra la figure de la pièce.

290. Si l'on suppose le poids Π placé au milieu de l'intervalle AM', on a $c'=2c$, et

$$\Pi'=\Pi\frac{2c''-3c}{4(c''-2c)},\quad \Pi''=\Pi\frac{c}{4(c''-2c)}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et écrivant 2P au lieu de Π, on aura pour déterminer la figure de la première moitié de la pièce,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P\left(\frac{c}{2} - x\right),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P\left(\frac{cx}{2} - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y = P\left(\frac{cx^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right).$$

On vérifie que les équations appartenant à la seconde moitié indiquent une figure symétrique à celle de la première moitié. L'ordonnée du milieu de la pièce, ou la flèche de courbure, est

$$\frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{c^3}{12};$$

et en comparant ce résultat à celui du n° 56, on voit que cette flèche de courbure est 4 fois moindre lorsque les extrémités sont encastrées que lorsqu'elles sont posées sur des appuis.

291. En supposant toujours le poids Π ou $2P$ placé au milieu de l'intervalle AM', la courbure est la plus grande possible aux deux extrémités et au milieu de la pièce, qui tend à se rompre en même temps en ces trois points. L'équilibre relatif à la rupture est exprimé par l'équation

$$\rho = P\frac{c}{2};$$

ensorte que la pièce peut supporter un poids deux fois plus grand que celui qu'elle supporterait si les extrémités étaient simplement posées sur des appuis (*a*).

(*a*) Ce résultat est généralement admis par les savants, qui l'ont établi d'une autre manière; mais il est contredit par M. Barlow qui, dans son *Essay on the strength and stress of timber*, page 132, subs-

Équilibre d'une pièce supportée par trois ou un plus grand nombre de points d'appui.

292. Quand une verge rigide chargée de poids est soutenue sur un nombre de points d'appui plus grand que 2, les efforts que chacun de ces points d'appui peut supporter sont indéterminés entre certaines limites. Ces limites peuvent toujours être fixées par les principes de la statique. Mais si l'on suppose la verge élastique, l'indétermination cesse entièrement. On considérera seulement ici une des questions de ce genre les plus simples qui puissent être proposées.

On supposera la pièce MM' (Fig. 50) posée horizontalemeut sur trois points d'appui, placés, l'un au milieu A de la longueur de cette pièce, et les deux autres aux extrémités M, M'. Chaque moitié de la pièce est chargée au milieu N, N', d'un poids Π, Π'. Il s'agit de déterminer la figure affectée par la pièce, et les efforts exercés sur chaque point d'appui. On nommera

c la moitié AM ou AM' de la longueur de la pièce;
p, q, q' les efforts exercés en A, M, M';

---

titue la raison de 3 à 2 à celle de 2 à 1. La proposition sur laquelle M. Barlow fonde son raisonnement, et qui est énoncée page 115 du même ouvrage, est inexacte et contraire à l'expérience. On peut remarquer qu'il est difficile, dans les expériences, de réaliser l'hypothèse de l'encastrement aux deux extrémités. Il faut, pour que l'on y parvienne, que la pièce soit prolongée de chaque côté sur une assez grande longueur. Les expressions de Π' et Π'' indiquent effectivement que les efforts exercés sur les points fixes tendent à devenir infinis quand la longueur sur laquelle la pièce est prolongée devient nulle. On peut voir sur ce sujet les expériences rapportées dans le Traité du mouvement des eaux, Œuvres de Mariotte, tome II, page 466.

ω l'angle que fait avec l'axe Ax la tangente à la courbe au point A;

ε et ρ auront les significations indiquées n° 276.

Les principes de la statique exigeant 1° que la somme des poids Π, Π' soit égale à la somme des efforts exercés sur les points d'appui, 2° que la somme des moments des forces, pris par rapport à un point quelconque, par exemple au point A, soit nulle; on a d'abord les deux équations

$$\Pi + \Pi' = p + q + q', \quad \Pi - \Pi' = 2(q - q').$$

293. En regardant ensuite la pièce comme encastrée en A, on aura pour la portion AN

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi\left(\frac{c}{2} - x\right) - q(c - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi\left(\frac{cx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) - q\left(cx - \frac{x^2}{2}\right) + \varepsilon \operatorname{tang.}\omega,$$

$$\varepsilon\, y = \Pi\left(\frac{cx^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right) - q\left(\frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + x.\varepsilon \operatorname{tang.}\omega,$$

On aura ensuite pour la portion NM, en déterminant les constantes de manière que, pour $x = \frac{c}{2}$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et y soient égales à celles qui seraient données par les équations pécédentes,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -q(c - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = -q\left(cx - \frac{x^2}{2}\right) + \Pi\frac{c^2}{8} + \varepsilon \operatorname{tang.}\omega,$$

$$\varepsilon\, y = -q\left(\frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \left(\Pi\frac{c^2}{8} + \varepsilon \operatorname{tang.}\omega\right)x - \Pi\frac{c^3}{48}.$$

Les équations qui conviendraient aux parties A N' et N'M' de la pièce se déduiront des précédentes, en y écrivant Π' au lieu de Π, q' au lieu de q, et changeant le signe de tang. ω. En remarquant ensuite que les équations appartenant aux parties NM et N'M' doivent donner $y=0$ quand on suppose $x=c$, on aura les deux équations

$$0=-q\frac{c^2}{3}+\Pi\frac{5c^2}{48}+\varepsilon\,\text{tang.}\,\omega.$$

$$0=-q'\frac{c^2}{3}+\Pi'\frac{5c^2}{48}-\varepsilon\,\text{tang.}\,\omega.$$

294. Au moyen de ces équations, et de celles du n° 292, on trouvera

$$\text{tang.}\,\omega=\frac{\Pi-\Pi'}{\varepsilon}\cdot\frac{c^2}{32},$$

$$p=\frac{22\,\Pi+22\,\Pi'}{32},$$

$$q=\frac{13\,\Pi-3\,\Pi'}{32},$$

$$q'=\frac{-3\,\Pi+13\,\Pi'}{32};$$

et l'on connaîtra la figure de la pièce en substituant ces valeurs dans les équations précédentes. On voit que le point d'appui A supporte seul les $\frac{2}{3}$ à très peu près de la somme des poids dont la pièce est chargée. Les efforts exercés sur les points d'appui sont indépendants de ε, en sorte qu'ils demeurent les mêmes pour des pièces plus ou moins flexibles.

295. Le point A est celui où la courbure de la pièce est la plus grande, et où elle tend à se rompre. En égalant le moment de rupture ρ à la valeur de $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}$ qui

convient à ce point, on a

$$\rho = \frac{3\Pi + 3\Pi'}{32} \cdot c.$$

296. Si l'on suppose égaux les poids Π et Π', il viendra

$$\text{tang.}\,\omega = 0,\ p = \frac{22\Pi}{16},\ q = q' = \frac{5\Pi}{16}.$$

297. En adoptant la même supposition, l'équilibre relatif à la rupture est exprimé par l'équation

$$\rho = \frac{3\Pi}{16} \cdot c.$$

Chaque moitié de la pièce est alors dans le même cas que si elle était encastrée horizontalement à une extrémité et supportée à l'autre. Le résultat que l'on vient d'obtenir s'accorde effectivement avec celui du n° 287, en écrivant ici $2P$ au lieu de Π, et $2c$ au lieu de c.

Remarque sur l'usage qu'on doit faire des résultats précédents dans les applications.

298. Les résultats exposés dans cet article serviront à apprécier les flexions des pièces chargées horizontalement. On substituera dans les formules, à la place de ε, les valeurs du moment d'élasticité données dans les nos 50 et suivants. Par exemple, si la section de la pièce est rectangulaire, on écrira $E\frac{ab^3}{12}$ à la place de ε. La valeur de E se conclut des expériences rapportées nos 63 et suivants. On connaîtra ainsi le degré de la flexion de la pièce, en raison des dimensions de la section.

Ces résultats serviront également à apprécier les charges qui pourraient causer la rupture des pièces, ou les plus grandes charges que l'on puisse faire supporter à ces pièces dans les constructions. On substituera à la place de ρ les valeurs du moment de rupture données dans les n°s 76 et suivants. Par exemple, si la section de la pièce est rectangulaire, on écrira $R\frac{ab^2}{6}$ à la place de ρ. Quand on voudra connaître les charges capables de causer la rupture, on attribuera à R les valeurs déduites des expériences rapportées dans les n°s 91 et suivants; et quand on voudra connaître les plus grandes charges que l'on puisse faire supporter aux pièces dans les constructions, on emploira les valeurs de R′ indiquées dans les n°s 124, 126 et 129.

Ces remarques s'appliquent également aux résultats contenus dans les articles suivants.

ARTICLE II.

De la résistance d'une pièce prismatique posée verticalement et chargée sur l'extrémité supérieure.

299. On suppose une pièce AM (Fig. 51) dont l'extrémité inférieure A est posée sur un plan horizontal fixe. L'extrémité supérieure M est placée dans la même verticale que l'extrémité inférieure, et chargée d'un poids Q. Il s'agit de trouver les conditions de la flexion de la pièce causée par l'action de ce poids. On nommera

c la distance AM des extrémités,
s la longueur AmM de la pièce,

x, y l'abscisse Ap et l'ordonnée pm d'un point quelconque de la courbe,

ε et ρ auront les valeurs indiquées n° 276.

L'équation d'équilibre est

$$-\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=Qy,$$

dont l'intégrale est

$$y=f\sin.\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}.x,$$

f étant une constante arbitraire. Cette constante représente évidemment la plus grande ordonnée de la courbe, ou la flèche de courbure, qui est supposée très-petite.

300. On doit avoir $y=0$ quand $x=c$. Il est donc nécessaire, si f n'est pas nulle, que

$$\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}.c=i\pi,\ \text{d'où}\ Q=i^2\pi^2.\frac{\varepsilon}{c^2},$$

i étant un nombre entier quelconque, et π le rapport de la circonférence au diamètre; ce qui détermine la valeur du poids Q qui peut maintenir la pièce fléchie. Cette valeur est réciproque au quarré de la longueur de la pièce.

301. En substituant la valeur de Q dans l'équation précédente, où la flèche f demeure indéterminée, on a

$$y=f\sin.i\pi\frac{x}{c},$$

$$s=c\left[1+\left(\frac{i\pi f}{2c}\right)^2\right],$$

$$f=\frac{2}{i\pi}\sqrt{c(s-c)}.$$

302. Si l'on donne successivement à i les valeurs entières 1, 2, 3, etc., la courbe représentée par l'équation précédente affectera diverses figures. La fig. 51 répond au cas où $i=1$ et $Q=\pi^2\frac{\varepsilon}{c^2}$. La fig. 52 répond au cas où $i=2$ et $Q=4\pi^2\frac{\varepsilon}{c^2}$: une pièce affecterait cette figure si le milieu N était maintenu dans la ligne verticale qui en contient les deux extrémités. La fig. 53 répond au cas où $i=3$ et $Q=9\pi^2\frac{\varepsilon}{c^2}$: une pièce affecterait cette figure si les points situés au tiers et aux deux tiers de la longueur étaient maintenus dans la verticale qui en contient les extrémités. Et ainsi de suite.

303. Les conditions d'équilibre relatives à la rupture s'expriment, conformément au n° 275, en égalant ρ à la valeur maximum de $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}$: on a donc ici

$$\rho=Qf, \text{ ou } \rho=i^2\pi^2\frac{\varepsilon}{c^2}\cdot f.$$

La flèche de courbure f demeurant indéterminée, on ne peut déduire de ces équations les conditions de la rupture. On est seulement assuré que le poids qui causera la rupture surpassera la valeur de Q du n° 300. Si la valeur de f déduite de l'équation précédente,

$$f=\frac{\rho c^2}{i^2\pi^2},$$

est une très-petite quantité, le poids qui causera la rupture surpassera très-peu la valeur dont on vient de parler. Il la surpassera d'autant plus que cette valeur de f sera plus grande. Les mêmes considérations s'ap-

pliquent aux cas d'équilibre examinés dans les numéros suivants.

Équilibre d'une pièce chargée verticalement, lorsque l'extrémité inférieure est encastrée, et l'extrémité supérieure libre.

304. Dans ce cas (Fig. 54), en conservant les dénominations du n° 299, on a

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = Q(f - y),$$

f représentant l'ordonnée BM du point extrême. L'intégrale est

$$y = f\left(1 - \cos. \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x\right).$$

305. On doit avoir $y = f$ quand $x = c$. Parconséquent

$$\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot c = \frac{(2i+1)\pi}{2}, \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{(2i+1)^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{c^2}.$$

306. L'équation de la courbe devient

$$y = f\left(1 - \cos. \frac{(2i+1)\pi}{2} \cdot \frac{x}{c}\right),$$

et donne

$$s = c\left[1 + \left(\frac{(2i+1)\pi . f}{2.2c}\right)^2\right],$$

$$f = \frac{2.2}{(2i+1)\pi} \sqrt{c(s-c)}.$$

307. La fig. 54 répond au cas ou $i = 0$, et $Q = \frac{\pi^2}{4} \frac{\varepsilon}{c^2}$. La fig. 55 répond au cas où $i = 1$, et $Q = \frac{9\pi^2}{4} \frac{\varepsilon}{c^2}$: les ordonnées des points situés au $\frac{1}{3}$ et aux $\frac{2}{3}$ de la longueur de la pièce sont égales à f et $2f$. La fig. 56 ré-

pond au cas ou $i=2$ et $Q=\frac{25\pi^2}{4}\frac{\varepsilon}{c^2}$: les ordonnées des points situés au $\frac{1}{5}$ et aux $\frac{3}{5}$ de la longueur de la pièce sont égales à f; celle du point situé aux $\frac{2}{5}$ est égale à $2f$, et celle du point situé aux $\frac{4}{5}$ est nulle. Et ainsi de suite.

A longueur égale, le poids qui peut faire fléchir la pièce de la manière indiquée fig. 54, est 4 fois plus grand que celui qui peut la faire fléchir de la manière indiquée fig. 51.

Équilibre d'une pièce chargée verticalement, lorsque l'extrémité inférieure est encastrée et l'extrémité supérieure maintenue dans une même verticale.

308. Dans ce cas l'équation d'équilibre est celle du n° 299 : mais on ne peut satisfaire à cette équation avec la condition que l'expression de y donne en même temps $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=0$ lorsque $x=0$. Il résulte de là qu'une pièce, dans le cas dont il s'agit, ne peut être maintenue fléchie. Mais si l'on suppose que le poids Q, au lieu d'agir exactement dans le sens de l'axe de la pièce, agisse à une distance f de cet axe, aussi petite que l'on voudra (Fig. 57), l'équation d'équilibre sera celle du n° 304, et la valeur de y sera représentée par l'équation trouvée dans ce n°.

Cette équation devant donner $y=0$ quand $x=c$, on a ici

$$\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\cdot c = 2\,i\,\pi, \text{ d'où } Q=4i^2\pi^2\frac{\varepsilon}{c^2}.$$

L'équation de la courbe est

$$y=f\left(1-\cos.2i\pi\frac{x}{c}\right);$$

et il est à remarquer que cette équation donne également $\frac{dy}{dx}=0$ quand $x=c$, en sorte que la tangente de la courbe est nécessairement verticale à l'extrémité supérieure aussi bien qu'à l'extrémité inférieure. La fig. 57 répond au cas où $i=1$ et $Q=4\pi^2\frac{\varepsilon}{c^2}$: l'ordonnée du point milieu, ou la flèche de courbure, est égale à $2f$. La valeur du poids Q est quadruple de celle qui aurait lieu si ce poids agissait dans le sens de l'axe de la pièce, et si les extrémités n'étaient pas encastrées.

La pièce représentée fig. 57 est dans le même état d'équilibre que les $\frac{4}{5}$, à compter du bas, de la pièce représentée fig. 56 : si l'on écrit effectivement $\frac{4}{5}c$ au lieu de c dans l'expression précédente de Q, on retrouvera la valeur indiquée n° 307 pour le cas de la fig. 56.

Expériences sur la résistance des pièces de bois chargées verticalement.

309. Résultats moyens des expériences faites par M. Aubry (*a*), sur des pièces de bois de chêne posées verticalement et chargées sur l'extrémité supérieure.

Longueur des pièces.	Équarrissage des pièces.	Charge qui a causé la première inflexion.	Charge qui a causé la rupture.
pouces.	pouces.	livres.	livres.
18	$\frac{1}{2}$	80	205
36	$\frac{1}{2}$	20	54
18	1	534	638

(*a*) Mémoires sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques, page 33.

310. Résultats des expériences de M. Girard, sur des pièces de bois de chêne posées verticalement et chargées sur l'extrémité supérieure (*a*).

Longueur des pièces.	Largeur des pièces.	Épaisseur des pièces.	Première flèche de courbure observée.	Charge qui a causé la première inflexion.	Charge qui a causé la rupture.
mètres.	mètre.	mètre.	mètre.	kilogrammes.	kilogrammes.
2,6	0,158	0,128	0,0068	17321	
2,6	0,162	0,106	0,0056	11994	42514
2,6	0,158	0,102		11992	
2,6	0,133	0,099	0,0079	11993	
2,6	0,131	0,106	0,0068	11997	22931
2,27	0,156	0,131	0,0028	22939	
2,27	0,158	0,129		17317	
2,27	0,156	0,104	0,0062	17320	33120
2,27	0,158	0,102	0,0068	17322	28626
2,27	0,126	0,102	0,0079	11999	
1,95	0,156	0,133	0,0879	17322	
1,95	0,158	0,102	0,0056	17321	
1,95	0,16	0,102	0,0045	11974	32997
1,95	0,133	0,106	0,0056	17295	
1,95	0,129	0,108	0,0056	11998	
2,27	0,158	0,108	0,0029	11999	
2,6	0,158	0,135	0,0051	11999	37305
2,6	0,158	0,131	0,0045	11997	
2,6	0,187	0,158	0,0023	11998	
2,6	0,189	0,158	0,0023	11998	

Les pièces se courbent généralement sur les deux faces. On a inscrit sur le tableau la plus grande des deux premières flèches de courbure observées.

311. Résultats moyens des expériences faites par M. Lamandé sur des pièces de chêne de Champagne, assez sec, posées verticalement et chargées sur l'extrémité supérieure (*b*).

(*a*) Traité analytique de la résistance des solides, et des solides d'égale résistance, page 138, et table I.

(*b*) Traité de la construction des ponts, par M. Gauthey, tome II, page 48.

Longueur des pièces.	Équarrissage des pièces.	Première flèche de courbore observée.	Charge qui a causé la première inflexion.	Charge qui a causé la rupture.
mètre.	mètre.	mètre.	kilogrammes.	kilogrammes.
0,649	0,054	0,0017	5369	8861
1,298	0,054	0,0037	2863	5693
1,948	0,054	0,0045	1325	3559
0,649	0,081	0,0015	18129	23163
1,298	0,081	0,005	9246	16465
1,948	0,081	0,0042	4793	11619
0,649	0,108	0,0014	27211	40921
1,298	0,108	0,0015	21488	40495
1,948	0,108	0,005	9663	27629

312. Résultats moyens des expériences faites par M. Rondelet (*a*), sur des pièces posées verticalement et chargées sur l'extrémité supérieure. Ces pièces avaient toutes un pouce d'équarrissage.

Espèces de bois.	Longueur des pièces.	Charge qui a causé la rupture.
	pouces.	livres.
Chêne.....	1	6346
	12	5310
	24	2911
	36	2163
Sapin.....	1	7490
	12	6355
	24	3429
	36	2575

L'auteur conclut de ces expériences la règle suivante. Prenant pour unité la force nécessaire pour écraser un cube, qui est de 44 livres par ligne quarrée de la sec-

(*a*) Art de bâtir, tome IV, page 68.

tion transversale pour le chêne, 52 livres pour le sapin (n° 10), la force nécessaire pour rompre une pièce dont la hauteur est 12 fois l'épaisseur, sera $\frac{5}{6}$.

24..... $\frac{1}{2}$.
36..... $\frac{1}{3}$.
48..... $\frac{1}{6}$.
60..... $\frac{1}{12}$.
72..... $\frac{1}{24}$.

D'après le même auteur, une pièce de bois chargée verticalement est susceptible de plier lorsque la longueur surpasse 10 fois l'équarrissage.

Expériences sur la résistance des pièces de fer forgé chargées verticalement.

313. Expériences faites à l'école des ponts et chaussées, sur des pièces de fer forgé, posées verticalement, et chargées sur l'extrémité supérieure (*a*).

Longueur des pièces.	Largeur des pièces.	Épaisseur des pièces.	Charge qui a causé la rupture.
mètre.	millimètres.	millimètres.	kilogrammes.
0,244	20,3	20,3	10426
0,325	20,3	20,3	8454
0,258	20,3	20,3	10216
0,325	13,5	13,5	3951

314. D'après un très-grand nombre d'expériences faites par M. Rondelet (*b*), sur des pièces ayant de 6

(*a*) Traité de la construction des ponts, par M. Gauthey, tome II, page 152.

(*b*) Art de bâtir, tome IV, page 522.

à 12 lignes d'équarrissage, et de 1 ½ pouce à 20 pieds de longueur; cet architecte établit que la charge nécessaire pour comprimer un cube de fer forgé étant de 512 livres par ligne quarrée de la section transversale (n° 14), celle nécessaire pour faire plier et rompre une barre dont la longueur est égale à 27, 54, 81, 108, 135, 162, 189, 216, 243 fois l'équarrissage, est 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 livres, par ligne quarrée de la section transversale.

315. Expériences faites par M. Duleau, sur des pièces de fer forgé posées verticalement et chargées sur l'extrémité supérieure (*a*).

PIÈCES SOUMISES A L'EXPÉRIENCE.	LONGUEUR des pièces.	LARGEUR des pièces.	ÉPAISSEUR des pièces.	CHARGE qui a causé la flexion.
	mètres.	millimètres.	millimètres.	kilogrammes.
Fer du Périgord. La section est un triangle équilatéral, de $0^m,038$ de côté.....	3,02			860
Idem.....	2,01	30	11	190
Idem, doux (destiné pour les fers des chevaux).....	2,01	70	11,2	520
Même pièce, fixée au milieu..				1945
Fer du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge).....	2,02	45	12	400
Fer du Périgord.....	2,01	40	11,5	260
Même pièce, fixée au milieu..				900
Fer du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge).....	2,01	58	15	1000
Idem.....	3,02	25	15	180
Idem.....	3,02	39	19,6	780
Idem.....	2,01	60	20	2400
Idem.....	3,02	60	20	1200
Idem.....	3,02	39	24,5	1320
Idem.....	3,02	31	31	2000
Fer rond, de Bilbao, ayant $0^m,0318$ de diamètre.....	3,02			1285

(*a*) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, page 26.

Le résultat général de ces observations est qu'en calculant les valeurs des charges qui causent la flexion d'après la formule $Q = \pi^2 \frac{\varepsilon}{c^2}$ (dans laquelle on mettrait, à la place de ε, $E\frac{ab^3}{12}$ pour une pièce rectangulaire, et $E\frac{\pi r^4}{4}$ pour une pièce cylindrique, en faisant $E = 20\,000\,000\,000^k$), on trouve des valeurs plus petites que celles données par l'expérience, dans le rapport de 7 à 8 environ (*a*). L'auteur attribue en partie cette différence au frottement du levier employé pour transmettre la pression.

Expériences sur la résistance des pièces de fer fondu, pressées dans le sens de la longueur.

316. On peut voir sur ce sujet les expériences de M. G. Rennie, rapportées ci-dessus, n° 16.

D'après d'autres expériences de M. Reynolds (*b*), faites sur de la fonte très-douce, deux barres d'un pouce anglais quarré et de 3 pieds de longueur, ayant une extrémité posée sur une barre horizontale, avec laquelle elles formaient un angle de 45°, et s'appuyant l'une contre l'autre par les extrémites supérieures, ont supporté sur ces extrémités une charge de 15680 livres avoir du poids, produisant dans le sens de chaque barre un effort de 11087 livres.

Dans un autre essai, deux barres semblables, mais

(*a*) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, page 24.

(*b*) *Bank's on the power of machines*, page 89.

posées de manière à former avec la barre horizontale des angles de $22^\circ \frac{1}{2}$, ont supporté sur les extrémités supérieures une charge de 8960 livres, produisant dans le sens de chaque barre un effort de 11709 livres.

Remarques sur l'usage que l'on doit faire des résultats précédents dans les applications.

317. Les résultats exposés dans les nos 299 et suivants supposent essentiellement la force représentée par Q dirigée dans le sens de l'axe de la pièce, ou du moins dans le plan vertical passant par cet axe, perpendiculairement auquel la flexion s'opère. Dans la réalité, lorsque une pièce est chargée verticalement, le poids est ordinairement réparti sur toute l'étendue de la section transversale. Il faudrait donc, pour que l'expérience s'accordât exactement avec ces résultats, que les pièces fussent terminées aux extrémités par une pointe ou par une arête. Les conditions d'équilibre, lorsque le poids est réparti sur toute la section transversale, dépendent d'un ordre de considérations dont on ne s'occupe point ici.

En exposant les résultats dont il s'agit, on a supposé le sens de la flexion de la pièce déterminé, et on a représenté par ε la valeur du moment d'élasticité qui devait avoir lieu en conséquence, et qui se calculerait d'après la figure de la pièce, par les règles des nos 50 et suivants. Quand une pièce est chargée sur l'extrémité supérieure, le sens de la flexion, en général, n'est pas déterminé. Il est naturel d'admettre que la pièce fléchira dans la direction pour laquelle la valeur du moment d'élasticité est la moindre possible. Si la section transversale est circulaire, cette valeur est la même

dans toutes les directions. Si la section transversale est un rectangle dont les côtés sont a et b, et que la flexion ait lieu perpendiculairement à un plan qui forme l'angle φ avec la face de la pièce dont la largeur est a, on a

$$\varepsilon = E\frac{a^3 b \sin.^2\varphi + ab^3\cos.^2\varphi}{12}.$$

Cette formule apprend 1° que, si la section transversale est un quarré, le moment d'élasticité est le même dans toutes les directions (On avait déja remarqué (n° 52) que la valeur de ce moment était la même, la flexion ayant lieu dans le sens des côtés de la section, ou dans le sens des diagonales); 2° que, si a est le plus grand côté, la plus petite valeur du moment délasticité a lieu lorsque la pièce fléchit dans le sens du côté b. Dans les expériences, les pièces à base quarrée fléchissent indifféremment dans le sens de la diagonale ou des côtés. Les pièces à base rectangulaire même, à moins que les deux côtés de la section ne soient très différents, ne fléchissent pas toujours exactement dans le sens du plus petit côté, la direction de la flexion étant ordinairement déterminée par quelque défaut d'homogénéité dans la pièce, ou par la manière dont la pression s'exerce aux extrémités.

Ces remarques indiquent par quelles raisons les expériences connues ne donnent pas toujours, pour le poids qui peut faire fléchir une pièce à base rectangulaire chargée verticalement, une valeur conforme à celle que l'on calculerait par la formule $Q = \pi^2\frac{\varepsilon}{c^2}$, en supposant que la flexion ait lieu dans le sens du

petit côté de la section transversale. Mais lorsque l'on prend les précautions convenables pour accorder les circonstances de l'expérience avec les hypothèses sur lesquelles les formules sont fondées, le résultat est alors représenté exactement par cette formule.

318. Les pièces destinées dans les constructions à résister comme on le suppose ici, c'est-à-dire pressées dans le sens de la longueur, sont ordinairement trop courtes, eu égard à leur grosseur, pour qu'elles puissent céder en offrant le genre de flexion auquel s'appliquent les résultats des nos 299 et suivants. La résistance de ces pièces doit être déterminée d'après d'autres considérations. En effet, considérant une pièce rectangulaire chargée verticalement, on aura, d'après le no 302, $\pi^2 \frac{\varepsilon}{c^2}$, ou $E \frac{\pi^2 ab^3}{12\, c^2}$, pour l'expression du moindre poids qui peut maintenir cette pièce fléchie; c'est-à-dire

$$E \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{b^2}{c^2}$$

pour l'expression du moindre poids dont on puisse charger l'unité superficielle de la section transversale. En supposant $E = 1\,000\,000\,000^k$ pour le bois de chêne, $E = 20\,000\,000\,000^k$ pour le fer forgé; et comparant les valeurs données par cette formule avec les résultats rapportés d'après M. Rondelet, dans les nos 312 et 314, on trouvera que la formule précédente donne des valeurs plus grandes que ces résultats lorsque l'épaisseur b de la pièce surpasse le $\frac{1}{20}$ environ de la longueur c. Par conséquent, pour les pièces dont la longueur n'est pas égale à 20 fois l'épaisseur, c'est-à-dire dans la plupart des cas qui se présentent dans

les constructions, la résistance ne doit pas être déterminée d'après la formule précédente, mais par la considération du poids qui pourrait écraser la pièce.

Le poids qui peut écraser ou comprimer une pièce dont la longueur est égale à une ou deux fois l'épaisseur, peut être estimé, pour chaque millimètre quarré de la section transversale, à

3 kil.	pour le bois de chêne et de sapin,
40	fer forgé,
100	fer fondu.

On conclut des expériences rapportées ci-dessus: 1° que pour les bois l'évaluation précédente doit être réduite aux $\frac{5}{6}$ lorsque la longueur de la pièce est égale à 12 fois l'épaisseur, et à moitié quand cette longueur est égale à 24 fois l'épaisseur;

2° Que pour le fer forgé l'évaluation précédente doit être réduite aux $\frac{5}{8}$ quand la longueur est égale à 12 fois l'épaisseur, et à moitié quand la longueur est égale à 24 fois l'épaisseur;

3° Que pour le fer fondu l'évaluation précédente doit être réduite aux $\frac{2}{3}$ à-peu-près, quand la longueur est égale à quatre fois l'épaisseur, à moitié environ quand la longueur est égale à 8 fois l'épaisseur, et au $\frac{1}{15}$ lorsque la longueur est égale à 36 fois l'épaisseur.

Les expériences connues ne donnent pas les moyens d'évaluer avec exactitude la résistance dans les cas intermédiaires différents de ceux que l'on vient de spécifier.

319. Quant aux pièces dont la longueur surpasserait 20 fois environ l'épaisseur, on peut en évaluer la résistance par les formules des n°s 302 et suivants,

avec la certitude que cette évaluation ne dépassera pas les résultats donnés par les expériences.

320. Lorsque dans les applications on aura évalué, conformément aux deux nos précédents, la résistance dont une pièce chargée verticalement est susceptible, on pourra, pour en conclure le plus grand poids dont cette pièce puisse être chargée avec sécurité dans les constructions, réduire les résultats au $\frac{1}{10}$ environ pour le bois, au $\frac{1}{4}$ ou au $\frac{1}{5}$ pour le fer forgé ou fondu.

ARTICLE III.

De la résistance d'une pièce prismatique chargée verticalement, lorsque la direction du poids est distante de l'axe de la pièce.

321. Soit une pièce verticale AM (Fig. 58.), encastrée à l'extrémité inférieure, et supportant le poids Π suspendu à l'extrémité de la traverse MC assujettie à former toujours un angle droit avec la pièce AM. L'action du poids comprime la pièce verticale dans le sens MA, et tend à la faire plier et rompre. On nommera

c la distance AB;

l la distance MC;

x, y l'abscisse Ap, et l'ordonnée mp d'un point quelconque m de la courbe affectée par la pièce;

f l'ordonnée MB du point extrême;

ε aura la signification indiquée n° 55.

L'équation d'équilibre sera

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(l+f-y);$$

et l'intégrale de cette équation (qui doit donner $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=0$ quand $x=0$),

$$y=(l+f)\left(1-\cos.\, x\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}\right).$$

On doit avoir $y=f$ quand $x=c$: donc

$$\frac{l}{l+f}=\cos.\, c\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}},$$

d'où

$$f=l\left(\frac{1}{\cos.\, c\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}-1\right)$$

et

$$\Pi=\varepsilon\left[\frac{\text{arc}\left(\cos.=\frac{l}{l+f}\right)}{c}\right]^2.$$

L'équation de la courbe est

$$y=l.\,\frac{1-\cos.\, x\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}{\cos.\, c\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}.$$

On doit mettre dans l'expression de Π le plus petit des arcs dont le cosinus est égal à $\frac{l}{l+f}$, à moins qu'il n'y ait certains points de la pièce AB maintenus fixes. La flèche de courbure produite par un poids donné est proportionnelle à la distance MC. Le poids capable de faire prendre à la pièce une flèche de courbure donnée, est réciproque au quarré de la longueur de cette pièce.

322. La question précédente diffère de celles qui

ont été traitées dans les nos 299 et suivants, en ce que l'on obtient ici une relation entre le poids Π dont la pièce est chargée, et la flèche de courbure f produite par l'action de ce poids; ce qui permet de déterminer la limite des efforts auxquels on peut exposer la pièce dans une construction. On y parvient en remarquant 1° que les fibres de cette pièce sont d'abord comprimées également dans toute l'étendue de la section, par l'action de la force Π dirigée parallèlement à l'axe; 2° que, par l'effet de la courbure, cette compression se trouve diminuée à la face convexe et augmentée à la face concave. La flèche de courbure f, et par suite le poids Π, peuvent être réglés par la condition que la plus grande compression des fibres ne dépasse pas une limite donnée.

Désignant par ω l'aire de la section transversale de la pièce, et E ayant la signification indiquée n° 47, on aura $\frac{\Pi}{E\,\omega}$ pour la compression des fibres résultant de l'action de Π. Désignant de plus, comme au n° 75, par v' la distance à l'axe d'équilibre de la fibre extrême qui subit la plus grande compression, la plus grande compression des fibres résultant de la flexion de la pièce sera exprimée pour un point quelconque, comme on le voit d'après le n° 47, par $v'\frac{d^2y}{dx^2}$, quantité dont la plus grande valeur, qui a lieu au point A, est $\frac{v'\Pi l}{\varepsilon\cos.c\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}$. Le plus grand accourcissement des fibres est donc ici

$$\Pi\left(\frac{1}{E\omega}+\frac{v'l}{\varepsilon\cos.c\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}\right).$$

Par conséquent, si l'on veut que le plus grand effort auquel les fibres sont exposées sur l'unité superficielle ne dépasse pas une certaine limite, représentée comme au n° 124 par R', il ne faudra pas que ce plus grand accourcissement surpasse la fraction $\frac{R'}{E}$. La valeur de Π ne devra donc point dépasser celle qui satisfait à l'équation

$$\frac{R'}{E} = \Pi \left(\frac{1}{E\omega} + \frac{v' l}{\varepsilon \cos. c \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}} \right).$$

Les valeurs qu'il convient d'attribuer au poids R', pour les divers matériaux, ont été indiquées n°s 124 et suivants.

323. Si la section transversale de la pièce est un rectangle dont a soit la largeur et b la hauteur, on a $\omega = ab$, $\varepsilon = E\frac{ab^3}{12}$, $v' = \frac{b}{2}$. L'équation précédente devient

$$R' = \frac{\Pi}{ab^2} \left(b + \frac{6l}{\cos. c \sqrt{\frac{12\Pi}{Eab^3}}} \right).$$

324. On supposera maintenant que l'extrémité supérieure de la pièce est fixée et encastrée (Fig. 59), et que le poids Π fait supporter à cette pièce une tension longitudinale, en même temps qu'il la fait plier. Dans ce cas, en conservant les dénominations du n° 321, l'équation d'équilibre sera

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi (l - f + y);$$

et supposant pour abréger $\frac{\Pi}{\varepsilon} = r^2$, on aura pour

l'intégrale

$$l-f+y=Ae^{rx}+Be^{-rx},$$

e représentant la base des logarithmes hyperboliques, A et B deux constantes arbitraires.

Cette équation devant au point A donner $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; et au point M, $x=c$, $y=f$, on a

$$l-f=A+B,$$
$$0=A-B,$$
$$l=Ae^{rc}+Be^{-rc};$$

d'où l'on déduit

$$A=B=\frac{l}{e^{rc}+e^{-rc}},$$

$$f=l\left(1-\frac{2}{e^{rc}+e^{-rc}}\right).$$

L'équation de la courbe est

$$y=l.\frac{e^{rx}+e^{-rx}-2}{e^{rc}+e^{-rc}}.$$

325. On obtient ici, comme dans le cas précédent, une relation entre le poids Π et la flèche de courbure f que ce poids fait prendre à la pièce. Le plus grand poids Π dont la pièce puisse être chargée se déterminera donc également par la condition de ne pas faire supporter aux fibres une tension qui dépasse

une limite donnée. En conservant les dénominations du n° 322, on aura $\frac{\Pi}{E\omega}$ pour l'extension des fibres résultant de l'action de Π, et $\frac{\Pi v' l}{\varepsilon}$ pour la plus grande extension des fibres provenant de la courbure de la pièce, qui a lieu au point M où cette pièce tend à se rompre. Par conséquent, si l'on veut que la plus grande tension ne dépasse pas R', on posera l'équation

$$\frac{R'}{E} = \Pi\left(\frac{1}{E\omega} + \frac{v' l}{\varepsilon}\right),$$

d'où l'on déduira la valeur de Π.

326. Si la section transversale de la pièce est un rectangle dont a soit la largeur et b la hauteur, on a $\omega = ab$, $\varepsilon = \frac{Eab^3}{12}$, $v' = \frac{b}{2}$. L'équation précédente devient

$$R' = \Pi\frac{b+6l}{ab^2}, \text{ d'où } \Pi = R'\frac{b+6l}{ab^2}.$$

ARTICLE IV.

De la résistance d'une pièce prismatique chargée obliquement.

327. On suppose une pièce AM (Fig. 60) posée obliquement, dont l'extrémité inférieure A est encastrée, et dont l'extrémité supérieure M est chargée d'un poids Π. Soit nommé

α l'angle formé par la direction AB de la pièce avec la verticale;

c la distance AB;

x, y l'abscisse Ap et l'ordonnée mp d'un point quelconque m de la courbe affectée par la pièce;

f l'ordonnée MB du point extrême;

P, Q les composantes perpendiculaire et parallèle à AB du poids Π suspendu au point M, d'où $P = \Pi \sin. \alpha$, $Q = \Pi \cos. \alpha$;

ε ayant la signification indiquée n° 55.

L'équation d'équilibre sera

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = P(c - x) + Q(f - y);$$

et faisant pour abréger $p^2 = \frac{P}{\varepsilon}$, $q^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$, on aura pour l'intégrale de cette équation

$$f - y = A \sin. q(x + B) - \frac{p^2}{q^2}(c - x),$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

On a au point A, $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; et au point M, $x = c$, $y = f$; ce qui donne les trois conditions

$$f = A \sin. qB - \frac{p^2 c}{q^2},$$

$$0 = qA \cos. qB + \frac{p^2}{q^2},$$

$$0 = \sin. q(c + B);$$

On en déduit

$$\sin. qB = \sin. qc, \quad \cos. qB = -\cos. qc,$$

$$A = \frac{p^2}{q^3 \cos. qc},$$

$$f = \frac{p^2}{q^3}(\text{tang.}\, qc - qc).$$

328. D'après les valeurs précédentes, l'équation de la courbe sera

$$y = \frac{p^2}{q^3}\left(\frac{\sin. qc - \sin. q(c-x)}{\cos. qc} - qx\right).$$

L'expression de f donnera la valeur de la flèche de courbure en fonction des forces P, Q. Cette flèche devant demeurer très-petite, il est nécessaire que tang. $qc - qc$ soit une très-petite quantité. Donc, o, μ', μ'', μ''', etc., étant la suite des arcs dont la longueur est respectivement égale à celle de leur tangente, on ne peut attribuer à la composante Q que des valeurs qui surpassent peu les nombres o, $\frac{\mu'^2}{c^2}$, $\frac{\mu''^2}{c^2}$, $\frac{\mu'''^2}{c^2}$, etc. En adoptant la première de ces valeurs, la pièce affectera la courbe représentée fig. 60. Les valeurs suivantes répondent à des courbes offrant un nombre de points d'inflexion de plus en plus grand, et dont l'existence supposerait que certains points de ces courbes ont été maintenus fixement dans la ligne AB. Si tous les points sont libres dans l'intervalle AB, les poids Π, que la pièce pourra supporter, sont donc assujettis à la condition que le nombre $c\sqrt{\frac{Q}{\Pi}}$ soit compris entre o et μ', et que la valeur précédente de f soit fort petite. Cette valeur de f indiquera le déplacement du point M causé par l'action du poids Π.

329. La limite des poids dont la pièce peut être chargée, se détermine ici de la même manière que

pour la pièce considérée n° 321. ω et v' ayant ici les mêmes significations qu'au n° 322, on aura $\frac{Q}{E.\omega}$ pour l'accourcissement des fibres résultant de l'action de la force Q dirigée parallèlement à l'axe de la pièce; et $v'\frac{d^2y}{dx^2}$ pour l'accourcissement des fibres placées à la face concave produite par la flexion. La plus grande valeur de cette dernière quantité, qui a lieu au point A, étant ici $v'\frac{p^2}{q}$ tang. qc, le plus grand accourcissement total des fibres est

$$\frac{Q}{E\omega}+\frac{v'P\,\text{tang.}c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\sqrt{Q\varepsilon}}.$$

Par conséquent, si l'on ne veut pas que le plus grand effort exercé pour comprimer les fibres, rapporté à l'unité superficielle, surpasse R', on posera l'équation

$$\frac{R'}{E}=\frac{Q}{E\omega}+\frac{v'P\,\text{tang.}c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\sqrt{Q\varepsilon}}.$$

En déterminant le poids Π de manière que les valeurs des composantes P et Q satisfassent à cette équation, on connaîtra la limite cherchée.

330. Si la section transversale de la pièce est un rectangle ayant a pour largeur et b pour hauteur, $\omega=ab$, $\varepsilon=E\frac{ab^3}{12}$, $v'=\frac{b}{2}$: l'équation obtenue ci-dessus devient

$$R'=\frac{1}{ab^2}\left(Qb+\frac{6P\,\text{tang.}c\sqrt{\frac{12Q}{Eab^3}}}{\sqrt{\frac{12Q}{Eab^3}}}\right).$$

Les valeurs qu'il convient d'attribuer à R' pour les divers matériaux, ont été indiquées nos 124 et suivants.

331. On suppose maintenant la pièce AM (Fig. 61) fixée et encastrée à l'extrémité A, inclinée de bas en haut, de manière que le poids Π tend à l'étendre et non à la contracter. En conservant les dénominations du n° 327, on aura ici pour l'équation d'équilibre

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=P(c-x)-Q(f-y),$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2}=p^2(c-x)-q^2(f-y).$$

L'intégrale de cette équation est

$$f-y=Ae^{q(c-x)}+Be^{-q(c-x)}+\frac{p^2}{q^2}(c-x),$$

e étant la base des logarithmes hyperboliques, A et B deux constantes arbitraires.

On a, au point A, $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; et au point M, $x=c$, $y=f$: donc

$$f=Ae^{qc}+Be^{-qc}+\frac{p^2c}{q^2},$$

$$0=q\left(Ae^{qc}-Be^{-qc}\right)+\frac{p^2}{q^2},$$

$$0=A+B;$$

d'où l'on déduit

$$B=-A,$$

$$A=-\frac{p^2}{q^3\left(e^{qc}+e^{-qc}\right)},$$

$$f=\frac{p^2}{q^3}\left(qc-\frac{e^{qc}-e^{-qc}}{e^{qc}+e^{-qc}}\right).$$

Le poids Π doit être tel que cette formule donne pour f une valeur très-petite.

L'équation de la courbe est

$$y=\frac{p^2}{q^3}\left(qx-\frac{e^{qc}-e^{-qc}-e^{q(c-x)}+e^{-q(c-x)}}{e^{qc}+e^{-qc}}\right).$$

332. Les considérations employées n° 322 peuvent s'appliquer ici. Les fibres de la pièce sont d'abord étendues également, par l'action de la composante Q, de la quantité $\frac{Q}{E.\omega}$. Les fibres situées aux faces convexe et concave sont ensuite étendues et comprimées au point A, par l'effet de la courbure, de la quantité $\frac{v'p^2}{q}.\frac{e^{qc}-e^{-qc}}{e^{qc}+e^{-qc}}$. Par conséquent, si la plus grande tension des fibres ne doit pas surpasser R', on posera l'équation

$$\frac{R'}{E}=\frac{Q}{E.\omega}+\frac{v'P}{\sqrt{Q\varepsilon}}.\frac{e^{c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}-e^{-c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}}{e^{c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}+e^{-c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}}.$$

La plus grande valeur que l'on puisse attribuer au poids Π est déterminée par la condition que les composantes P, Q de ce poids satisfassent à cette équation.

333. Si la section transversale de la pièce est un rectangle ayant a pour largeur et b pour hauteur,

$\omega = ab$, $\varepsilon = E\frac{ab^3}{12}$, $v' = \frac{b}{2}$. L'équation précédente devient

$$R' = \frac{1}{ab^2}\left(Qb + \frac{6P}{\sqrt{\frac{12Q}{Eab^3}}} \cdot \frac{e^{c\sqrt{\frac{12Q}{Eab^3}}} - e^{-c\sqrt{\frac{12Q}{Eab^3}}}}{e^{c\sqrt{\frac{12Q}{Eab^3}}} + e^{-c\sqrt{\frac{12Q}{Eab^3}}}}\right);$$

Équilibre d'une pièce inclinée chargée entre les extrémités.

334. Le cas le plus simple est celui d'une pièce inclinée AB (Fig. 62), chargée en C du poids Π, et supportée aux extrémités par des portions de plans horizontaux. Cette pièce ne tend point à glisser, parce que le glissement ne produirait pas l'abaissement du poids Π. En désignant par c, c' les longueurs AC, BC, on aura $\Pi\frac{c'}{c+c'}$ et $\Pi\frac{c}{c+c'}$ pour les efforts verticaux exercés en A et en B. Chaque portion AC, BC de la pièce peut être regardée comme encastrée en C, et sollicitée à l'extrémité A ou B par ces efforts. Par conséquent la partie AC, qui est comprimée dans le sens de la longueur, est dans le même cas que la pièce considérée n° 327, la force désignée par Π dans ce numéro étant ici $\Pi\frac{c'}{c+c'}$; et la partie BC, qui est étendue dans le sens de la longueur, est dans le même cas que la pièce considérée n° 331, la force désignée par Π dans ce numéro étant ici $\Pi\frac{c}{c+c'}$.

335. La pièce AB (Fig. 63), supportée dans une direction inclinée par le point d'appui C sur lequel

elle ne peut glisser, et chargée aux extrémités de poids qui se font mutuellement équilibre, est sollicitée de la même manière que la pièce précédente. La partie BC, qui est comprimée, est dans le même cas que la pièce considérée n° 327; et la partie AC, qui est étendue, est dans le même cas que la pièce considérée n° 331.

336. La pièce inclinée AB (Fig. 64), chargée en C du poids Π, est souvent supportée d'une manière différente de celle que l'on a supposée dans le n° 334. L'extrémité supérieure B est appuyée contre un plan vertical, et l'extrémité inférieure A sur un plan horizontal : mais comme cette dernière extrémité tend alors à glisser, elle doit butter contre un appui, ou être retenue par un tirant. Le poids Π est ici entièrement supporté par l'appui A. La pièce exerce en B une pression horizontale, déterminée par la condition de faire équilibre autour du point A, avec le bras de lévier AE, au poids Π agissant avec le bras de lévier AD; et cette même pression horizontale se reporte contre l'appui placé en D. Nommant c, c' les longueurs AC, BC, et α l'angle ACD, on aura donc

$$\Pi \frac{c \text{ tang. } \alpha}{c + c'}.$$

pour la pression horizontale dont il s'agit. Chaque partie AC et BC de la pièce est dans le même cas que si elle était encastrée en C, et sollicitée à l'autre extrémité par les forces qui viennent d'être indiquées. Par conséquent : 1° la partie AC, qui est comprimée, doit être assimilée à la pièce considérée n° 327, les forces désignées par P, Q, Π dans ce numéro étant

ici respectivement égales à $\Pi \sin. \alpha \left(1 - \frac{c}{c+c'}\right)$, $\Pi \cos. \alpha \left(1 + \frac{c \tang.^2 \alpha}{c+c'}\right)$, $\Pi \sqrt{1 + \frac{c^2 \tang.^2 \alpha}{(c+c')^2}}$. 2° La partie BC, qui est également comprimée, doit être assimilée à la même pièce, les forces désignées par P, Q, Π dans le n° 327 étant ici respectivement, $\Pi \frac{c \sin. \alpha}{c+c'}$, $\frac{c \sin. \alpha \tang. \alpha}{c+c'}$, $\Pi \frac{c \tang. \alpha}{c+c'}$.

ARTICLE V.

De la résistance d'une pièce prismatique fléchie, posée horizontalement entre deux appuis, et chargée au milieu.

337. On suppose qu'une pièce prismatique MAM', (Fig. 65) ayant été fléchie, est posée horizontalement entre deux appuis dont l'intervalle est un peu moindre que la longueur de cette pièce, de manière que la convexité est tournée en haut. Un poids 2P étant suspendu au milieu A de la longueur de la pièce, il s'agit de trouver les conditions de l'équilibre de ce système. Chaque moitié de la pièce est dans le même cas que si, étant encastrée horizontalement en A, elle était sollicitée à l'extrémité M ou M' par une certaine force dont la composante verticale est P. Ainsi nommant

Q la composante horizontale de l'effort exercé contre les appuis M ou M';

x, y les coordonnées Ap, mp d'un point quelconque de la courbe;

c la moitié AB de l'intervalle des appuis;

s la moitié A m M de la longueur de la pièce;

f l'ordonnée BM du point extrême de la courbe;

ε ayant la signification indiquée n° 55:

l'équation d'équilibre sera

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=-\mathrm{P}(c-x)+\mathrm{Q}(f-y);$$

ou, faisant pour abréger $p^2=\frac{\mathrm{P}}{\varepsilon}$, $q^2=\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-p^2(c-x)+q^2(f-y).$$

L'intégrale de cette équation est

$$f-y=\mathrm{A}\sin.q(x+\mathrm{B})+\frac{p^2}{q^2}(c-x),$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

338. On a, au point A, $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; et au point M, $x=c$, $y=f$; ce qui donne les trois conditions

$$f=\mathrm{A}\sin.q\mathrm{B}+\frac{p^2}{q^2}c,$$

$$0=q\mathrm{A}\cos.q\mathrm{B}-\frac{p^2}{q^2},$$

$$0=\sin.q(c+\mathrm{B}),\ \text{d'où}\ q(c+\mathrm{B})=i\pi,$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre, et i un nombre entier quelconque. On en déduit

$$\mathrm{A}=-\frac{p^2}{q^3\cos.qc};$$

et il reste l'équation de condition

$$\text{tang.}\,qc=qc-\frac{q^3f}{p^2},\ \text{ou}\ f=\frac{p^2}{q^3}(qc-\text{tang.}\,qc).$$

Ainsi la valeur de la force Q est déterminée par la condition que la tangente de l'arc $c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$ soit moindre que cet arc de la quantité $f\frac{Q}{P}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$; quantité qui doit être fort petite, parce que la courbure de la pièce est supposée très-petite.

339. D'après les valeurs précédentes, l'équation de la courbe devient

$$y=\frac{p^2}{q^3}\left(qx-\frac{\sin.qc-\sin.q(c-x)}{\cos.qc}\right),$$

et l'on en déduit, à fort peu près,

$$s=c+\frac{p^4c}{4q^4}\left(3-\frac{3\,\text{tang.}qc}{qc}+\text{tang.}^2qc\right),$$

$$s=c+\frac{p^4c^3}{4q^2}+\left(\frac{3p^2}{4q^3}-\frac{p^2c^2}{2}\right)f.$$

Représentant par o, σ_1, σ_2, σ_3, etc. la suite des arcs dont la longueur est égale à celle de leur tangente, on satisfera à la condition précédente en donnant successivement à la force Q des valeurs un peu plus petites que $\frac{\sigma_1^2\varepsilon}{c^2}$, $\frac{\sigma_2^2\varepsilon}{c^2}$, $\frac{\sigma_3^2\varepsilon}{c^2}$, etc. Il résultera de ces suppositions des courbes offrant un nombre de points d'inflexion de plus en plus grand.

En admettant la première de ces valeurs, la question proposée se trouvera résolue : les dernières équations des nos 338 et 339 feront connaître Q et f lorsqu'on se sera donné c, s et P. La forme de la courbe est représentée fig. 65.

340. Si l'on suppose $f=0$, l'équation de condition trouvée n° 338 devient

$$\text{tang.}\, qc = qc, \text{ d'où } Q = \frac{\sigma_1^2 \varepsilon}{c^2} = (4,4934)^2 \frac{\varepsilon}{c^2};$$

On a

$$s = c + \frac{p^4 c^3}{4q^2},$$

d'où

$$Q = \frac{P^2}{4\varepsilon} \cdot \frac{c^3}{s-c} \text{ et } 2P = \frac{4\sigma_1 \varepsilon}{c^2} \sqrt{\frac{s-c}{c}}$$

pour l'expression du poids 2P, qui, étant suspendu au milieu de la pièce, peut faire abaisser ce point au niveau des appuis. Ce poids doit être regardé comme le plus grand que la pièce puisse supporter. Si l'on supposait, en effet, le point A placé au-dessous du point C (Fig. 66), l'équation d'équilibre devrait être écrite, en supposant les y positives comptées de bas en haut,

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = P(c-x) + Q(f-y).$$

On aurait pour l'équation de condition

$$\text{tang.}\, qc = qc + \frac{q^3 f}{p^2}, \text{ ou } f = \frac{p^2}{q^3}(\text{tang.}\, qc - qc);$$

et l'équation de la courbe serait

$$y = \frac{p^2}{q^3}\left(\frac{\sin. qc - \sin. q(c-x)}{\cos. qc} - qx\right).$$

La force Q devrait être supposée un peu plus grande que 0, $\sigma_1^2 \frac{\varepsilon}{c^2}$, $\sigma_2^2 \frac{\varepsilon}{c^2}$, $\sigma_3^2 \frac{\varepsilon}{c^2}$, etc. La première de ces suppositions doit ici être adoptée, et il en résultera que la force Q, ainsi que le poids 2P, prendront des

valeurs beaucoup moindres que celles qu'ils avaient lorsque le milieu de la pièce était au-dessus de la ligne passant par les extrémités. La courbe n'offrant plus de point d'inflexion, est représentée par la fig. 66.

Les résultats précédents expliquent l'excès de résistance dont une pièce est susceptible lorsque, ayant été courbée, les extrémités sont placées entre des obstacles qui ne peuvent être écartés. On voit que cette résistance a une limite, que l'on ne peut dépasser sans obliger la pièce à changer aussitôt de figure. Après ce changement la pièce ne peut plus supporter qu'un poids beaucoup plus petit, et plus petit même que celui qu'elle supporterait, à courbure égale, si les extrémités étaient simplement posées sur des appuis.

ARTICLE VI.

De la résistance des pièces prismatiques dont l'axe est courbe.

341. On s'est occupé dans l'article précédent d'une pièce dont la figure naturelle est rectiligne, et que l'on maintient courbée pour en augmenter la résistance. Il s'agit ici des pièces dont la figure naturelle est courbe, telles que les arcs en bois ou en fer employés à la construction des ponts.

Dans les pièces de ce genre, il peut exister entre la distribution de la charge et la figure de la courbe une telle relation que la pièce se trouve simplement comprimée ou étendue, et ne tende point à changer de figure : on dit alors que la pièce est tracée suivant la *courbe d'équilibre*. Dans d'autres cas, la pièce tend à fléchir par l'action des poids dont elle est chargée.

Des pièces dont la figure est celle de la courbe d'équilibre.

342. La recherche de la courbe d'équilibre relative à une distribution donnée de la charge, dépend des principes déja émis en traitant des voûtes. Considérons une pièce dont la figure naturelle est la courbe plane AM (Fig. 67), à chaque point de laquelle est appliquée une force dirigée dans le plan de la courbe. Cette pièce sera en équilibre, et ne tendra nullement à fléchir, si la pression qui a lieu au point quelconque m dans le sens de la courbe, est égale et directement opposée à la résultante des forces appliquées à la partie mM de la pièce. On suppose d'ailleurs l'extrémité A appuyée contre un plan fixe perpendiculaire à la courbe. Par conséquent en désignant, comme au n° 223, par

x, y les coordonnées horizontale et verticale Ap, pm d'un point m de la courbe;

s la longueur de l'arc Am;

a, b les coordonnées du point extrême M;

S la longueur totale AmM de la courbe;

ρ le rayon de courbure de la courbe au point m;

α l'angle que la tangente de la courbe au point A forme avec l'horizontale Ax;

F la valeur de la force appliquée au point m, pour une unité de longueur mesurée sur l'arc de la courbe;

φ l'angle que la direction de la force F forme avec l'axe horizontal Ax;

T la pression exercée au point m, dans le sens de la courbe;

P et Q les forces verticale et horizontale appliquées au point extrême M;

on aura généralement

$$T\frac{dy}{ds}=P+\int_s^S ds.F\sin.\varphi,$$

$$T\frac{dx}{ds}=Q+\int_s^S ds.F\cos.\varphi,$$

équations exprimant les conditions qui doivent être remplies pour que la pièce ne tende point à fléchir.

343. On en déduira, comme au n° 225,

$$-dT=F\,ds\left(\frac{dy}{ds}\sin.\varphi+\frac{dx}{ds}\cos.\varphi\right),$$

pour l'équation qui donnera la valeur de la pression exercée suivant la longueur de la pièce.

Cas où les forces appliquées à la pièce sont partout normales à la courbe.

344. On trouvera dans ce cas, comme au n° 226, que la pression doit être constante dans toute l'étendue de la courbe, dont la figure est déterminée par la condition

$$\rho=-\frac{T}{F},\ \text{d'où}\ T=-\rho F.$$

c'est-à-dire que le rayon de courbure doit être partout égal à la pression divisée par la valeur de la force normale rapportée à l'unité de la longueur.

345. Si la force normale est constante, la figure de la courbe doit être un arc de cercle.

Cas où les forces appliquées à la pièce sont partout verticales.

346. Dans ce cas, nommant p le poids dont est chargé le point m, la valeur de ce poids étant rapportée à l'unité de longueur, et donnée en fonction de l'arc de la courbe, les équations du n° 342 deviendront

$$T\frac{dy}{ds}=P+\int_s^S ds.p,$$

$$T\frac{dx}{ds}=Q.$$

La composante horizontale de la pression T est constante dans toute l'étendue de la courbe, et égale à la force Q.

347. L'équation du n° 343 est ici

$$-dT=p\,ds.\frac{dy}{ds}, \text{ ou } -dT=p\,dy.$$

348. Au lieu de supposer la force F et le poids p donnés en fonction de l'arc s, on peut les supposer donnés en fonction de l'abscisse x : alors les équations du n° 346 se changent en

$$T\frac{dy}{ds}=P+\int_x^a dx.p$$

$$T\frac{dx}{ds}=Q.$$

On a, au lieu de l'équation du n° 347,

$$-dT=p\,dx.\frac{dy}{ds}.$$

349. Le cas le plus simple est celui où l'on supposerait p constante, c'est-à-dire la pièce chargée de

telle manière que des poids égaux répondent à des parties égales de l'axe horizontal Ax. Dans ce cas, on a

$$T\frac{dy}{ds}=P+p[a-x],$$

$$T\frac{dx}{ds}=Q,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P+p(a-x)}{Q},$$

$$y=\frac{1}{Q}\left[Px+p\left(ax-\frac{1}{2}x^2\right)\right].$$

350. La valeur de la pression est

$$T=Q\frac{ds}{dx},\quad \text{ou } T=Q\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

351. Considérons une pièce courbe AM (Fig. 68), chargée de la manière qui vient d'être indiquée, et supposons qu'outre la position du point extrême M, on donne l'ordonnée DN menée au milieu de l'intervalle AB. Nommant g la flèche verticale NG, l'équation précédente devra donner $y=\frac{b}{2}+g$ quand $x=\frac{a}{2}$, et $y=b$ quand $x=a$; d'où l'on déduit

$$P=\frac{pab}{8g}-\frac{pa}{2},$$

$$Q=\frac{pa^2}{8g};$$

et pour l'équation de la courbe, qui est une portion de parabole,

$$y=\frac{(b+4g)x}{a}-\frac{4gx^2}{a^2}.$$

352. L'inclinaison de la courbe au point A est donnée par l'équation

$$\text{tang. } \alpha = \frac{P + pa}{Q}, \text{ ou tang. } \alpha = \frac{b + 4g}{a}.$$

La formule du n° 350 donne pour la pression exercée en un point quelconque

$$T = \frac{pa^2}{8g}\sqrt{1 + \left(\frac{b+4g}{a} - \frac{8gx}{a^2}\right)^2},$$

et pour les pressions qui ont lieu respectivement aux points A et M,

$$T = \frac{pa^2}{8g}\sqrt{1 + \left(\frac{b+4g}{a}\right)^2},$$

et

$$T = \frac{pa^2}{8g}\sqrt{1 + \left(\frac{b-4g}{a}\right)^2}.$$

353. Supposons maintenant, la pièce courbe étant toujours chargée de la manière indiquée n° 349, qu'outre la position du point extrême M (Fig. 69), on donne l'abscisse AC du point O, qui est le sommet de la courbe, et où la tangente est horizontale. Appelant a' cette abscisse, on devra avoir $\frac{dy}{dx} = 0$ quand $x = a'$. On en déduit

$$P = -p(a - a'),$$

$$Q = \frac{pa(2a' - a)}{2b};$$

et pour l'équation de la courbe,

$$y = \frac{b}{a} \cdot \frac{2a'x - x^2}{2a' - a}.$$

354. Si, au lieu de donner l'abscisse AC ou a' du point O on donnait l'ordonnée CO de ce point, que nous désignerons par b', on aurait

$$P = -\frac{pa\sqrt{b'^2 - bb'}}{b' + \sqrt{b'^2 - bb'}},$$

$$Q = \frac{pa^2}{2b} \cdot \frac{b' - \sqrt{b'^2 - bb'}}{b' + \sqrt{b'^2 - bb'}},$$

$$a' = \frac{a}{b}\left(b' - \sqrt{b'^2 - bb'}\right);$$

et pour l'équation de la courbe,

$$y = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{2ab'x - \left(b' + \sqrt{b'^2 - bb'}\right)x^2}{b' - \sqrt{b'^2 - bb'}}.$$

355. On a dans le cas du n° 353

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{2ba'}{a(2a' - a)};$$

et dans celui du n° 354,

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{2}{a}\left(b' + \sqrt{b'^2 - bb'}\right).$$

La valeur de la pression, calculée par la formule du n° 350, est

$$T = Q\sqrt{1 + \left(\text{tang.}\,\alpha - \frac{px}{Q}\right)^2};$$

et devient aux points extrêmes A et M,

$$T = Q\sqrt{1 + \text{tang.}^2\,\alpha} = \frac{Q}{\cos.\,\alpha}$$

et

$$T = Q\sqrt{1 + \left(\text{tang.}\,\alpha - \frac{pa}{Q}\right)^2}.$$

356. On considérera encore le cas où la courbe étant appuyée en A (Fig. 70) contre un plan vertical, la tangente de cette courbe doit se confondre en ce point avec l'axe horizontal Ax. Les y positives étant supposées maintenant comptées de haut en bas, et remarquant que les équations du n° 349 doivent donner $\frac{dy}{dx}=0$, $y=0$ quand $x=0$; et $y=b$ quand $x=a$, en désignant toujours par a et b l'abscisse AB et l'ordonnée BM du point extrême M: on aura

$$P=-pa, Q=\frac{pa^2}{2b};$$

et pour l'équation de la courbe,

$$y=\frac{bx^2}{a^2}.$$

357. La valeur de la pression sera

$$T=Q\sqrt{1+\frac{p^2x^2}{Q^2}}, \text{ou } T=\frac{pa^2}{2b}\sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{a^4}}.$$

Au point extrême M, la tangente de la courbe forme avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente est $\frac{2b}{a}$. La valeur de la pression est dans ce point

$$\frac{pa}{2b}\sqrt{a^2+4b^2}.$$

358. On pourrait supposer qu'au lieu du plan fixe placé en A, il existe de l'autre côté de ce point une autre portion de courbe AM' (Fig. 71) égale à la première, et chargée de la même manière. Il suit de là que la parabole ordinaire, représentée par l'équation du n° 356, est la figure qu'il convient de donner à une pièce courbe MAM' posée sur deux appuis aux

points M, M', et chargée par des poids uniformément répartis sur l'horizontale BB', pour que cette pièce ne tende point à fléchir sous la charge. Les valeurs précédentes de P et Q représentent les efforts verticaux et horizontaux supportés par les deux appuis. Les valeurs de T du n° 357 donnent la pression supportée par les diverses parties de la courbe, pression qui, au sommet A, est égale à Q.

359. Si, au lieu d'une charge distribuée uniformément sur la ligne AB (Fig. 70), la pièce courbe supportait une charge augmentant uniformément du point A au point B, les équations du n° 348 deviendraient, en désignant par k une quantité constante,

$$-T\frac{dy}{ds}=P+\int_x^a dx(p+kx),$$

$$T\frac{dx}{ds}=Q;$$

d'où

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{1}{Q}[P+p(a-x)+\tfrac{1}{2}k(a^2-x^2)],$$

$$-y=\frac{1}{Q}[Px-p(ax-\tfrac{1}{2}x^2)+\tfrac{1}{2}k(a^2x-\tfrac{1}{3}x^3)].$$

On doit avoir au point A, $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; et au point B, $x=a$, $y=b$: d'où l'on déduit pour les forces qui doivent être appliquées au point extrême,

$$-P=pa+\tfrac{1}{2}ka^2,$$

$$Q=\frac{3pa^2+ka^3}{6b};$$

et pour l'équation de la courbe d'équilibre,

$$y=\frac{b(3px^2+kx^3)}{3pa^2+ka^3}.$$

360. La valeur de la pression, calculée par la formule du n° 350, serait ici

$$T = Q\sqrt{1 + \left(\frac{3b(2px + kx^2)}{3pa^2 + ka^2}\right)^2};$$

et deviendrait, au point extrême M,

$$T = Q\sqrt{1 + \left(\frac{3b(2p + ka)}{3pa + ka}\right)^2}.$$

La courbe forme en ce point avec l'horizon un angle dont la tangente trigonométrique est

$$\frac{3b(2p + ka)}{3pa + ka^2}.$$

361. Si l'on supposait la charge distribuée uniformément sur la longueur de la pièce courbe, la figure qui conviendrait à l'état d'équilibre serait la courbe connue sous le nom de chaînette. La pression supportée dans les diverses parties de la pièce se calculerait comme on calcule la tension dans cette courbe. On peut donc recourir, dans ce cas, aux formules données dans les traités de statique (*a*).

De la flexion des pièces courbes.

362. On considérera une pièce courbe A*m*M (Fig. 72) encastrée horizontalement à l'extrémité A, et l'on supposera que deux forces verticale et horizontale P et Q, ayant été appliquées à l'extrémité M de cette pièce, elle ait été fléchie suivant la courbe A*m*′M′. Il

(*a*) On peut aussi voir l'ouvrage intitulé : *Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus*, page 65.

s'agit, la figure de la courbe AM étant donnée, ainsi que le moment d'élasticité de la pièce et les forces P et Q, de connaître la figure de la courbe AM'. On nommera

x, y les coordonnées horizontale et verticale Ap, mp d'un point quelconque de la courbe AM;

s la longueur de l'arc Am;

x', y' les coordonnées du point m' de la courbe AM', dans lequel se transporte le point m;

a, b les coordonnées AB, MB du point extrême M;

a', b' les coordonnées AB', M'B' du point M', dans lequel se transporte le point M;

φ l'angle que la normale de la courbe AM menée au point m forme avec la verticale;

φ' l'angle que la normale de la courbe AM' menée au point m', forme avec la verticale;

ε le moment d'élasticité de la pièce courbe AM, dont l'expression générale est donnée n° 50.

Reprenons les considérations exposées n° 47, en désignant, comme dans ce numéro, par v la distance d'un point quelconque de la section transversale de la pièce à l'axe d'équilibre. Avant la flexion, la longueur d'une portion infiniment petite d'une fibre placée à la distance v de cet axe est $ds + v\,d\varphi$, parce que l'angle de deux normales consécutives est $d\varphi$. Après la flexion, et en faisant abstraction du changement qui peut être survenu dans la longueur de l'élément ds, la longueur de la même portion de fibre sera devenue $ds + v\,d\varphi'$. La proportion suivant laquelle cette portion de fibre s'est allongée est donc

$$\frac{(d\varphi' - d\varphi)\,v}{ds + v\,d\varphi}, \text{ ou simplement } \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}\,v,$$

en négligeant $v d\varphi$ à l'égard de ds, ce que l'on peut faire dans les cas ordinaires des applications, l'épaisseur de la pièce étant fort petite par rapport au rayon de courbure. On conclut de là, que les conditions de l'équilibre d'une pièce courbe s'expriment de la même manière que celles d'une pièce droite, en remplaçant la fonction $\frac{1}{\rho}$, ou $\frac{d^2 y}{dx^2}$, par $\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$.

363. L'équation exprimant les conditions de l'état d'équilibre de la pièce courbe AM sera donc

$$\varepsilon \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = P(a-x) + Q(b-y),$$

d'où l'on déduit

$$\varphi' - \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} [P(a-x) + Q(b-y)].$$

La flexion de la pièce étant toujours supposée très-petite, les angles φ' et φ doivent différer très-peu l'un de l'autre. Le second membre peut donc être regardé comme un angle très-petit, qui ne diffère pas de son sinus, et dont le cosinus est égal à l'unité. Ainsi l'équation précédente donnera

$$\cos.\varphi' - \cos.\varphi = -\frac{1}{\varepsilon} \sin.\varphi \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} [P(a-x) + Q(b-y)].$$

$$\sin.\varphi' - \sin.\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \cos.\varphi \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} [P(a-x) + Q(b-y)].$$

Mais on a $\cos.\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\sin.\varphi = \frac{dy}{ds}$; $\cos.\varphi' = \frac{dx'}{ds}$,

$\sin.\varphi' = \frac{dy'}{ds}$; en supposant toujours que les parties de la pièce ne changent pas de longueur quand elle fléchit. Donc

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

équations qui, en intégrant, feront connaître les déplacements de chacun des points de la pièce courbe, quand la figure de cette pièce sera donnée.

364. En développant le radical, les expressions précédentes deviendront

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \text{etc.}\right] [P(a-x) + Q(b-y)],$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \text{etc.}\right] [P(a-x) + Q(b-y)].$$

On pourra presque toujours, dans les applications, à raison du peu d'amplitude de la courbe des pièces, se borner au deuxième terme de la série. On ne commettrait même, dans beaucoup de cas, que de très-faibles erreurs en négligeant ce terme.

365. Dans une pièce courbe sollicitée de la manière indiquée n° 362, les parties sont tendues dans le sens de la longueur de la pièce par l'action de la force P, et comprimées par l'action de la force Q. La tension ou compression produite par chacune de ces forces, en un point quelconque de la courbe, est égale à la

force décomposée parallèlement à la direction de la courbe en ce point. Ainsi T désignant comme ci-dessus une pression, on a ici

$$T = -P\frac{dy}{ds} + Q\frac{dx}{ds},$$

ou

$$T = \frac{-P\frac{dy}{dx} + Q}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Application au cas où la figure de la pièce courbe est une portion de parabole.

366. On a dans ce cas $y = \frac{bx^2}{a^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2bx}{a^2}$; et en substituant dans les formules du n° 364,

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon}dx\left\{\frac{2b}{a^2}\left[P\left(ax^2 - \frac{x^3}{2}\right) + Q\left(bx^2 - \frac{bx^4}{3a^2}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{4b^3}{a^6}\left[P\left(\frac{ax^4}{3} - \frac{x^5}{4}\right) + Q\left(\frac{bx^4}{3} - \frac{bx^6}{5a^2}\right)\right] - \text{etc.}\right\},$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon}dx\left\{P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + Q\left(bx - \frac{bx^3}{3a^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2b^2}{a^4}\left[P\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + Q\left(\frac{bx^3}{3} - \frac{bx^5}{5a^2}\right)\right] - \text{etc.}\right\};$$

d'où l'on tire en intégrant

$$x' - x = -\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{2b}{a^2}\left[P\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right) + Q\left(\frac{bx^3}{3} - \frac{bx^5}{15a^2}\right)\right.\right.$$
$$\left. + \frac{4b^3}{a^6}\left[P\left(\frac{ax^5}{15} - \frac{x^6}{24}\right) + Q\left(\frac{bx^5}{15} - \frac{bx^7}{35a^2}\right)\right] - \text{etc.}\right\},$$

$$y'-y=\frac{1}{\varepsilon}\left\{P\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+Q\left(\frac{bx^2}{2}-\frac{bx^4}{12a^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2b^2}{a^4}\left[P\left(\frac{ax^4}{12}-\frac{x^5}{20}\right)+Q\left(\frac{bx^4}{12}-\frac{bx^6}{30a^2}\right)\right]-\text{etc.}\right\}.$$

Si l'on désigne par h et f les quantités dont le point extrême M est déplacé horizontalement et verticalement, ces formules donneront, en y faisant $x=a$,

$$-h=\frac{P}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{12}+\frac{b^3}{10}-\text{etc.}\right)+\frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{8ab^2}{15}+\frac{16b^4}{105a}-\text{etc.}\right)$$
$$f=\frac{P}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{3}+\frac{ab^2}{15}-\text{etc.}\right)+\frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{12}+\frac{b^3}{10}-\text{etc.}\right)$$

367. Considérons une pièce courbe MAM' (Fig. 73) formée de deux parties égales, supportée verticalement sur deux portions d'un plan horizontal, et chargée au milieu A du poids 2Π. La pièce cédera à l'action de ce poids, et le sommet s'abaissera en même temps que les extrémités s'écarteront l'une de l'autre. La moitié AM de la pièce est dans le même état d'équilibre que si, étant encastrée horizontalement en A, elle se trouvait sollicitée à l'extrémité M par une seule force verticale Π agissant de bas en haut. Par conséquent, faisant $P=-\Pi$ et $Q=0$ dans les équations précédentes, et se bornant aux deux premiers termes des séries, les valeurs

$$h=\frac{\Pi}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{12}+\frac{b^3}{10}\right),$$
$$-f=\frac{\Pi}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{3}+\frac{ab^2}{15}\right),$$

exprimeront respectivement la quantité dont chaque point M ou M' se déplace horizontalement, et l'abais-

sement du sommet A de la pièce. Cet abaissement est un peu plus grand qu'il ne serait pour une pièce rectiligne, à distance égale des points d'appui.

368. La formule du n° 365 donnera à fort peu près, pour la pression exercée dans le sens de la courbe au point dont l'abscisse est x,

$$T = \Pi\left(\frac{2bx}{a^2} - \frac{4b^3x^3}{a^6}\right).$$

Comme on suppose ici b petit par rapport à a, la plus grande valeur de cette pression aura lieu aux points extrêmes M ou M', dans lesquels $x = a$.

369. Considérons maintenant la même pièce courbe MAM' (Fig. 74), chargée de la même manière; mais en supposant que les appuis ne permettent pas aux extrémités M et M' de s'écarter l'une de l'autre. Chaque moitié de la pièce est dans le même état d'équilibre que si cette moitié, encastrée horizontalement en A, se trouvait sollicitée à l'extrémité M ou M' par une force verticale Π agissant de bas en haut, et par une certaine force horizontale Q. Cette force horizontale doit être déterminée par la condition que les points M ou M' ne se déplacent pas horizontalement. Il suit de là qu'en mettant $-\Pi$ à la place de P, dans les deux dernières équations du n° 366, et faisant $h = 0$, les valeurs qui s'en déduisent, et qui sont, en se bornant aux deux premiers termes des séries,

$$Q = \Pi\left(\frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a}\right),$$

$$f = -\frac{\Pi}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{128} - \frac{23ab^2}{6720}\right),$$

expriment respectivement la pression horizontale que la pièce courbe MAM' exerce contre les appuis, par suite de l'action du poids 2Π, et la quantité dont cette action fait abaisser le sommet A de la pièce. Ainsi, dans une pièce courbe qui a peu d'amplitude, l'abaissement du sommet est à peu près indépendant de la flèche b de cette pièce; et en le comparant à la valeur de f du n° 56, on voit qu'il n'est pas le 1/40 de l'abaissement qui aurait lieu pour une pièce rectiligne des mêmes dimensions. Mais il ne faut pas oublier que la valeur précédente est calculée sans avoir égard à la contraction que doit produire la pression exercée dans le sens de la longueur, et qui contribue avec la flexion à faire abaisser le sommet de la courbe.

370. Dans le cas dont il s'agit, les actions exercées sur la pièce ne tendent qu'à la contracter. La formule du n° 365, en remplaçant P par $-\Pi$, Q par $\Pi\left(\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}\right)$; et, en ne conservant que les termes de l'ordre $\frac{b^2}{a^2}$, donne pour la pression supportée dans le point dont l'abscisse est x

$$T=\Pi\left(\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}+\frac{2bx}{a^2}-\frac{25bx^2}{16a^3}\right).$$

La plus grande valeur de cette pression a lieu dans le point dont l'abscisse est $\frac{16a}{25}$, et cette valeur maximum est

$$T=\Pi\left(\frac{25a}{32b}+\frac{423b}{700a}\right).$$

De la flexion d'une pièce courbe dont tous les points supportent des poids.

371. Considérons la pièce courbe AM (Fig. 75), encastrée horizontalement à l'extrémité A, et chargée dans tous les points par des poids dont l'action oblige cette pièce à prendre la position AM'. En conservant les dénominations du n° 362, et appelant

p le poids placé au point m dont l'abscisse est x, la valeur de ce poids étant rapportée à l'unité de longueur, et donnée en fonction de l'abscisse x;

x_1 l'abscisse Aq d'un point quelconque n compris entre m et M;

p_1 la valeur de p dans le point n;

on aura pour exprimer les conditions de l'équilibre, au lieu de l'équation du n° 363,

$$\varepsilon\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}=\int_x^a dx_1 p_1(x_1-x),$$

d'où l'on déduira, comme dans ce numéro,

$$dx'-dx=-\frac{1}{\varepsilon}dy\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\int_x^a dx_1 p_1(x_1-x),$$

$$dy'-dy=\frac{1}{\varepsilon}dx\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\int_x^a dx_1 p_1(x_1-x),$$

formules qui feront connaître le déplacement de chacun des points de la courbe.

372. En développant le radical, ces formules deviendront

$$dx'-dx=-\frac{1}{\varepsilon}dy\int dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\text{etc.}\right]\int_x^a dx_1 p_1(x_1-x),$$

$$dy'-dy=\frac{1}{\varepsilon}dx\int dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\text{etc.}\right]\int_x^a dx_1 p_1(x_1-x).$$

373. La pression qui a lieu au point m est égale à la somme des poids dont la partie mM est chargée, décomposés parallèlement à la direction de la courbe en m. Cette pression est donc

$$T=-\frac{dy}{ds}\int_x^a dx_1 p_1, \text{ ou } T=-\frac{\frac{dy}{dx}\int_x^a dx_1 p_1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Cette valeur est négative lorsque $\frac{dy}{dx}$ est positif : alors la courbe n'est pas comprimée, mais tendue dans le sens de sa longueur.

Application au cas où la charge est uniformément distribuée, et où la figure de la pièce courbe est une portion de parabole.

374. Lorsque la charge est distribuée de manière que des poids égaux répondent à des parties égales de l'axe horizontal Ax, p est constante, et les formules du n° 372 deviennent

$$dx'-dx=-\frac{p}{\varepsilon}dy\int dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\text{etc.}\right]\left(\frac{a^2}{2}-ax+\frac{x^2}{2}\right),$$

$$dy'-dy=\frac{p}{\varepsilon}dx\int dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\text{etc.}\right]\left(\frac{a^2}{2}-ax+\frac{x^2}{2}\right).$$

L'équation de la courbe étant d'ailleurs $y=\frac{bx^2}{a^2}$; d'où $\frac{dy}{dx}=\frac{2bx}{a^2}$, ces formules donnent

$$x'-x=-\frac{p}{\varepsilon}\left[\frac{bx^3}{3}-\frac{bx^4}{4a}+\frac{bx^5}{15a^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2b^3}{a^6}\left(\frac{a^2x^5}{15}-\frac{ax^6}{12}+\frac{x^7}{35}\right)-\text{etc.}\right],$$
$$y'-y=\frac{p}{\varepsilon}\left[\frac{a^2x^2}{4}-\frac{ax^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right.$$
$$\left.+\frac{b^2}{a^4}\left(\frac{a^2x^4}{12}-\frac{ax^5}{10}+\frac{x^6}{30}\right)-\text{etc.}\right].$$

En supposant $x=a$, et désignant toujours par h, f les déplacements horizontaux et verticaux du point extrême M, on aura, en se bornant aux deux premiers termes des séries,

$$-h=\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{3a^3b}{20}+\frac{ab^3}{42}\right),$$
$$f=\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{a^4}{8}+\frac{a^2b^2}{60}\right).$$

375. La formule du n° 373 donnera ici, a très-peu près, pour la tension exercée en un point quelconque de la courbe,

$$T=2pb\frac{(ax-x^2)}{a^2}\left(1-\frac{2b^2x^2}{a^4}\right).$$

376. Considérons une portion de courbe MAM' (Fig. 76), formée de deux parties égales de figure parabolique, supportée verticalement sur deux appuis qui ne permettent pas aux extrémités de s'écarter, et chargée de poids répartis de la manière indiquée n° 374. Chaque moitié de la pièce est dans le même état d'équilibre que si cette moitié, étant encastrée horizontalement en A, était sollicitée par les poids distribués sur l'intervalle AM ou AM'; et de plus par une force verticale pa agissant de bas en haut au point

extrême M ou M', et par une certaine force horizontale Q agissant au même point. Or, supposant une pièce courbe sollicitée à la fois par des poids répartis sur sa longueur, et par des forces appliquées à l'extrémité, on connaîtra les déplacements des points de cette pièce en ajoutant les résultats obtenus n°s 363 et 372. Par conséquent, ajoutant ici les résultats des n°s 366 et 374, on aurait pour les déplacements des points extrêmes

$$-h=\frac{P}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{12}+\frac{b^3}{10}\right)+\frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{8ab^2}{15}+\frac{16b^4}{105a}\right)+\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{3a^3b}{20}+\frac{ab^3}{42}\right),$$

$$f=\frac{P}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{3}+\frac{ab^2}{15}\right)+\frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{12}+\frac{b^3}{10}\right)+\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{a^4}{8}+\frac{a^2b^2}{60}\right).$$

Mais dans le cas dont il s'agit on a $P=-pa$, et Q est déterminé par la condition $h=0$. Les pressions horizontales exercées contre les appuis sont donc

$$Q=\frac{pa^2}{2b};$$

et en mettant cette valeur dans l'expression de f, on trouve $f=0$. Ces résultats s'accordent avec ceux des n°s 356 et 358. La figure supposée à la pièce courbe étant ici celle qui convient à l'équilibre, on doit trouver une valeur nulle pour l'abaissement du sommet.

377. Si la pièce MAM' (Fig. 76), supposée toujours de figure parabolique, était chargée à la fois du poids $2pa$, réparti sur la longueur comme on vient

de le supposer, et du poids 2 Π suspendu au sommet A, la poussée ou pression horizontale exercée contre les appuis serait la somme de la valeur précédente de Q, et de la valeur trouvée n° 369, c'est-à-dire

$$Q = \frac{pa^2}{2b} + \Pi\left(\frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a}\right).$$

L'abaissement du sommet serait exprimé par la valeur de f du n° 369.

378. La pression supportée par les différentes parties de la pièce, dans le sens de la longueur, est représentée ici par la somme des valeurs de T données nos 357 et 370, qui est

$$T = \frac{pa^2}{2b} + \frac{pbx^2}{a^2} + \Pi\left(\frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2} - \frac{25bx^2}{16a^3}\right).$$

Si la quantité $64pa - 25\Pi$ est positive, la plus grande valeur de la pression a lieu aux extrémités M ou M'; elle est

$$\frac{pa^2}{2b} + 4pb + \Pi\left(\frac{25a}{32b} + \frac{45b}{112a}\right).$$

Si cette quantité est négative, la plus grande valeur de la pression a lieu au point dont l'abscisse est $x = a\frac{16\Pi}{25\Pi - 64pa}$.

Usage des résultats précédents dans les applications.

379. Les résultats précédents donneront les moyens de déterminer la limite des poids dont on peut charger une pièce courbe dans les divers cas d'équilibre que l'on a considérés.

Lorsque la figure de la pièce est celle qui convient à l'équilibre des poids dont elle est chargée, cette pièce est simplement pressée dans le sens de la longueur; et les dimensions de la section transversale étant ordinairement fort petites par rapport à la longueur, on peut supposer cette pression répartie également sur toute l'étendue de la section transversale. Par conséquent, ayant calculé la plus grande valeur de la pression, représentée par T dans les nos 342 et suivants, désignant par ω l'aire de la section transversale de la pièce, et (comme dans les nos 124 et suivants) par R′ le plus grand effort que l'on veut faire supporter aux fibres sur une étendue égale à l'unité superficielle, on posera l'équation

$$R' = \frac{T}{\omega},$$

d'après laquelle on pourra établir le rapport convenable entre la charge qui produit la pression et les dimensions de la pièce.

380. Lorsque la figure de la pièce n'est point celle qui convient à l'équilibre, et que cette pièce fléchit par l'action des poids dont elle est chargée, on peut déterminer la limite de ces poids d'une manière semblable à ce qu'on a vu n° 322. Représentons par ω la section transversale de la pièce, et par v' la distance à l'axe d'équilibre des fibres qui subissent la plus grande compression. En vertu de la pression T, dont les valeurs ont été données dans les nos 365 et suivants, les fibres sont d'abord comprimées, dans toute l'étendue de la section, d'une fraction de leur longueur égale à $\frac{T}{E\omega}$. De plus, par l'effet de la flexion, les fibres ex-

trêmes sont comprimées d'une fraction de leur longueur égale à $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$, comme on le voit facilement par les nos 47 et 362. Par conséquent, R' désignant le plus grand effort que l'on veut faire supporter aux fibres sur l'unité superficielle, on posera l'équation

$$\frac{R'}{E} = \frac{T}{E\omega} + v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds},$$

qui fera connaître la limite cherchée. On doit remarquer que la valeur de la quantité $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$, donnée par les formules précédentes, se trouvera positive ou négative suivant que, dans le point auquel cette valeur appartient, la flexion aura augmenté ou diminué l'angle formé par la normale de la courbe avec l'axe vertical des y. Mais on ne doit pas avoir égard ici au signe de cette quantité, et on doit en ajouter la valeur absolue à la valeur absolue de $\frac{T}{E\omega}$. On se rappellera d'ailleurs que T a été supposé positif quand il représente une pression; et par conséquent, lorsque sa valeur se trouvera négative, cela indiquera que la pièce est étendue, et non comprimée. Si la section transversale de cette pièce ne peut être partagée en deux parties symétriques par un axe perpendiculaire au plan de la flexion, v' doit représenter la distance à l'axe d'équilibre (déterminé conformément au n° 48) de la fibre qui est le plus comprimée, si T est positif; et de la fibre qui est le plus étendue, si T est négatif. Enfin, la somme des valeurs absolues des quantités $\frac{T}{E\omega}$ et $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ sera donnée en fonction de l'abscisse x; et il est évident que l'on doit attribuer à x dans cette

fonction la valeur qui la rendra la plus grande possible dans toute l'étendue de la courbe.

381. Considérons, par exemple, le cas du n° 369, où une pièce courbe de figure parabolique, posée verticalement sur deux appuis qui ne permettent pas aux extrémités de s'écarter l'une de l'autre, est chargée du poids 2Π suspendu au sommet. On a, par le n° 370,

$$\frac{T}{E\omega}=\frac{\Pi}{E\omega}\left(\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}+\frac{2bx}{a^2}-\frac{25bx^2}{16a^3}\right).$$

Le n° 363 donne

$$\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}=\frac{P}{\varepsilon}(a-x)+\frac{Q}{\varepsilon}\left(b-\frac{bx^2}{a^2}\right),$$

où l'on doit remplacer P par $-\Pi$, et Q par la valeur donnée n° 369 : on aura donc

$$v'\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}=\frac{v'\Pi}{\varepsilon}\left[-\frac{7a}{32}-\frac{b^2}{28a}+x-\left(\frac{25}{32a}-\frac{b^2}{28a^3}\right)x^2\right].$$

La valeur de T est positive dans toute l'étendue de la courbe, en sorte que la pièce est partout comprimée dans le sens de la longueur. La valeur de $v'\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}$ est d'abord négative, devient ensuite positive, et se réduit à zéro quand $x=a$. Sans avoir égard au signe de cette quantité, on en ajoutera la valeur à celle de $\frac{T}{E\omega}$; et réglant les valeurs de v' et de ε conformément à ce qui a été dit n° 380, on déterminera Π de manière que, pour toutes les valeurs de x comprises entre o et a, la somme de ces deux valeurs ne surpasse point $\frac{R'}{E}$.

382. Le cas du n° 376, où une pièce courbe semblable est chargée du poids $2pa$, réparti sur la longueur de cette pièce de la manière indiquée n° 374, est un des cas d'équilibre mentionnés n° 379.

383. Si, comme on l'a supposé n° 377, la pièce de figure parabolique, outre le poids $2pa$ réparti sur sa longueur, supportait encore le poids 2Π placé au sommet, il faudrait employer la valeur de T donnée dans le n° 378, et l'on aurait

$$\frac{T}{E\omega}=\frac{1}{E\omega}\left[\frac{pa^2}{2b}+\frac{pbx^2}{a^2}+\Pi\left(\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}+\frac{2bx}{a^2}-\frac{25bx^2}{16a^3}\right)\right].$$

Mais comme le poids 2Π produit seul la flexion de la pièce, la valeur de $v'\,\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}$ serait la même qu'au n° 381, et devrait être employée de la même manière.

De l'effet des pressions ou des tensions exercées dans le sens de la longueur des pièces courbes, pour les accourcir ou les allonger, et des changements de figure qui en résultent.

384. On a indiqué, dans les cas d'équilibre considérés ci-dessus, les valeurs des pressions exercées dans le sens de la longueur des éléments des pièces courbes. Ces pressions causent une diminution dans la longueur de ces éléments, longueur supposée invariable dans le n° 362 et dans les numéros suivants; et cette diminution de longueur concourt avec la flexibilité de la pièce à en changer la figure. Comme il ne s'agit ici que de changements très-petits, on peut les considérer successivement, calculer à part l'effet de chaque changement, et prendre la somme des résultats que l'on aura obtenus.

En conservant les dénominations du n° 362, et nommant s' la longueur de l'arc Am' (Fig. 73), que l'on suppose maintenant différente de la longueur de

l'arc Am, on aura $ds - ds'$ pour l'accourcissement de l'élément placé au point m, résultant de l'effort exercé dans le sens de cet élément; et $\frac{ds - ds'}{ds}$, pour la fraction exprimant la proportion de cet accourcissement. Par conséquent, désignant par ω l'aire de la section transversale de la pièce, et T représentant, comme ci-dessus, la pression exercée dans le sens de la longueur de cette pièce au point m, on a

$$E\omega \frac{ds - ds'}{ds} = T;$$

d'où

$$s - s' = \frac{1}{E\omega} \int dx . T \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

équation qui fera connaître les changements de longueur des parties de la pièce courbe. La figure de cette pièce demeurant d'ailleurs à fort peu près la même, il sera facile d'en conclure les déplacements des points qui résultent de ces changements.

385. Considérons, par exemple, le cas du n° 369, où une pièce courbe de figure parabolique, posée verticalement sur deux appuis, est chargée du poids 2Π suspendu au sommet. En remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{2bx}{a^2}$, T par la valeur du n° 370, et se bornant aux termes de l'ordre $\frac{b^2}{a^2}$, l'équation précédente deviendra

$$s - s' = \frac{\Pi}{E\omega} \int dx \left(\frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2}\right),$$

ou

$$s - s' = \frac{\Pi}{E\omega} \left(\frac{25ax}{32b} - \frac{bx}{28a} + \frac{bx^2}{a^2}\right).$$

Si l'on désigne par c la longueur totale des portions

de courbe AM ou AM' (fig. 74), et par c' la longueur que ces portions de courbe acquièrent par l'effet de la pression, on aura, en faisant dans l'équation précédente $x = a$,

$$c - c' = \frac{\Pi}{E\omega}\frac{25a^2}{32b}\left(1 + \frac{216b^2}{175a^2}\right)$$

pour l'accourcissement résultant de l'action du poids 2Π.

386. Si la même pièce courbe, chargée du poids $2pa$ réparti sur sa longueur, est dans l'état d'équilibre considéré n° 358, on doit remplacer T par l'expression du n° 357. L'équation du n° 384 devient alors

$$s - s' = \frac{p}{E\omega}\frac{a^2}{2b}\int dx\left(1 + \frac{4b^2x^2}{a^4}\right),$$

ou

$$s - s' = \frac{p}{E\omega}\frac{a^2}{2b}\left(x + \frac{4b^2x^3}{3a^4}\right);$$

d'où l'on tire

$$c - c' = \frac{p}{E\omega}\frac{a^3}{2b}\left(1 + \frac{4b^2}{3a^2}\right),$$

pour l'accourcissement total de chaque moitié de la pièce.

387. Supposant enfin, comme dans le n° 377, la même pièce chargée à la fois du poids $2pa$ réparti sur sa longueur, et du poids 2Π suspendu au sommet, l'accourcissement sera la somme de ceux qui viennent d'être calculés. On aura donc

$$s - s' = \frac{p}{E\omega}\frac{a^2}{2b}\left(x + \frac{4b^2x^3}{3a^4}\right) + \frac{\Pi}{E\omega}\left(\frac{25ax}{32b} - \frac{bx}{28a} + \frac{bx^2}{a^2}\right),$$

$$c - c' = \frac{p}{E\omega}\frac{a^3}{2b}\left(1 + \frac{4b^2}{3a^2}\right) + \frac{\Pi}{E\omega}\frac{25a^2}{32b}\left(1 + \frac{216b^2}{175a^2}\right).$$

388. L'abaissement du sommet de la courbe résultant des accourcissements, se calculera de la manière suivante. Considérant toujours une pièce de figure parabolique, on a (*a*)

$$c = a\left[1 + \frac{1}{3.2}\left(\frac{2b}{a}\right)^2 - \frac{1}{5.8}\left(\frac{2b}{a}\right)^4 + \frac{1}{7.16}\left(\frac{2b}{a}\right)^6 - \text{etc.}\right],$$

$$\left(\frac{2b}{a}\right)^2 = 6\left[\frac{c-a}{a} + \frac{9}{10}\left(\frac{c-a}{a}\right)^2 - \frac{54}{175}\left(\frac{c-a}{a}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

On déduit de la seconde équation

$$\frac{db}{dc} = \frac{3a}{4b}\left[1 + \frac{2.9}{10}\cdot\frac{c-a}{a} - \frac{3.54}{175}\left(\frac{c-a}{a}\right)^2 + \text{etc.}\right];$$

d'où il suit que $c - c'$ étant une petite variation de la longueur c de la moitié de la courbe, et $b - b'$ la variation correspondante de la flèche b, on a, à fort peu près, en se bornant toujours aux termes de l'ordre du quarré de $\frac{b}{a}$,

$$b - b' = \frac{3a}{4b}(c - c').$$

Expériences sur la résistance des pièces courbes.

389. D'après les expériences de M. Duleau (*b*), une pièce de fer forgé ayant $0^m,06$ de largeur et $0^m,02$ de hauteur, a été courbée à froid, suivant un arc de cercle de $6^m,32$ de corde et $0^m,7$ de flèche. Cette pièce étant posée verticalement entre deux appuis qui ne

(*a*) Mémoire sur les ponts suspendus, page 73.

(*b*) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, page 44.

permettaient pas aux extrémités de s'écarter (fig. 77), l'action de son propre poids n'en changeait pas sensiblement la figure.

La flèche de l'arc étant de $0^m,709$, et la pièce étant successivement chargée au milieu (fig. 75) de 20, 120, 220, 260 et $280^{kil.}$, ce milieu s'est abaissé successivement de 4, 34, 68, 89 et 112 millimètres. La pièce a totalement fléchi sous un poids de $288^{kil.}$.

Dans une autre expérience, la flèche de l'arc étant de $0^m,694$, et la pièce étant successivement chargée au milieu de 50, 100, 150, 200 et $250^{kil.}$, ce milieu s'est abaissé successivement de 10, 22, 39, 57 et 92 millimètres. Les poids étant ôtés, le sommet de la courbe est resté de $0^m,024$ plus bas qu'il n'était avant l'expérience. La pièce a fléchi sous un poids de $270^{kil.}$ qui n'avait pas été mis tout-à-fait au milieu.

La même pièce était prête à fléchir sous deux poids de 280 et $285^{kil.}$, placés de chaque côté au $\frac{1}{6}$ de la longueur à compter des extrémités.

La même pièce ayant été chargée successivement au $\frac{1}{4}$ de la longueur, à partir de l'une des extrémités, d'un poids de 20 et de $100^{kil.}$, et la flèche primitive étant de $0^m,696$, le point chargé s'est abaissé de 8 et de 45 millimètres. Le sommet de la courbe s'est d'abord un peu soulevé, puis s'est abaissé quand la charge a atteint $150^{kil.}$ La pièce a fléchi sous un poids de $177^{kil.}$

ARTICLE VII.

Des pièces de diverses figures employées dans les constructions. Des pièces formées de plusieurs parties assujetties entre elles.

390. On a supposé jusqu'ici la figure des pièces prismatique. La plupart des pièces employées dans les constructions en bois ont effectivement cette figure; mais dans les constructions en fer, et surtout dans celles en fer fondu, on adopte des figures appropriées à la nature des efforts que les pièces supportent. On obtient de cette manière une résistance égale avec un moindre volume de matière, et par conséquent avec une moindre dépense.

C'est principalement d'après la considération de la résistance à la rupture que la figure d'une pièce doit être déterminée. En effet, il convient de régler la force des pièces de manière que les extensions et compressions auxquelles les parties sont exposées ne puissent dépasser une limite donnée. Les formules relatives à la résistance à la rupture s'appliquent à cette détermination : il suffit de fixer convenablement, conformément à ce qu'on a vu dans l'article VII de la 1re section, la valeur de la constante qui représente le plus grand effort que les fibres doivent supporter sur l'unité superficielle.

Le prisme rectangulaire est la figure la plus simple que l'on puisse donner à une pièce. Cette figure peut être modifiée, soit en changeant la section transversale sans que la pièce cesse d'être prismatique, soit

en donnant à la section des dimensions différentes dans les divers points de la longueur de la pièce.

De la figure de la section transversale.

391. Considérons d'abord une pièce soumise à des efforts qui s'exercent perpendiculairement à sa longueur, de manière que le sens dans lequel cette pièce tend à fléchir soit déterminé; par exemple, une pièce posée horizontalement, et supportant des poids. En donnant à la section transversale la figure d'un rectangle dont les côtés sont horizontaux et verticaux; nommant

a la largeur de la section,

b la hauteur,

E et R ayant les significations indiquées nos 47 et 75; le moment d'élasticité sera, d'après le no 51,

$$\varepsilon = E\frac{ab^3}{12}:$$

et le moment de la résistance à la rupture, d'après le no 77,

$$\rho = R\frac{ab^2}{6}.$$

L'aire de la section transversale demeurant la même, la résistance à la rupture augmente proportionnellement à la hauteur b. Mais on ne peut, en général, augmenter b et diminuer a au-delà d'un certain terme, parce que la pièce n'aurait pas de stabilité, et parce qu'elle présenterait trop peu de résistance dans le sens horizontal.

392. L'aire de la section transversale et la résistance demeurant les mêmes, on procure à la pièce plus de

stabilité, et plus de résistance dans le sens horizontal, en donnant à la section la forme d'un tuyau rectangulaire (Fig. 77), ou celle de deux T opposés l'un à l'autre (Fig. 78). Nommant

a la largeur extérieure AB;
a' la largeur intérieure DE (Fig. 77), ou la somme des largeurs DE, de (Fig. 78);
b la hauteur extérieure AC;
b' la hauteur intérieure DF;

le moment d'élasticité sera

$$\varepsilon = E\,\frac{ab^3 - a'b'^3}{12};$$

et le moment de la résistance à la rupture

$$\rho = R\,\frac{ab^3 - a'b'^3}{6b}.$$

Pour qu'une section rectangulaire offrit, à surface égale, la même résistance à la rupture, la largeur te la hauteur devraient être respectivement

$$\frac{(ab - a'b')^2 b}{ab^3 - a'b'^3} \quad \text{et} \quad \frac{ab^3 - a'b'^3}{(ab - a'b')b}.$$

Les sections représentées fig. 77 et 78 paraissent être, dans le cas dont il s'agit, les plus convenables qu'il soit possible d'adopter. La première semble devoir offrir plus de solidité que la seconde; mais, lorsque les pièces sont faites en fer fondu, il est difficile d'obtenir sans défauts les tuyaux rectangulaires ou circulaires (*a*).

(*a*) Dans des pièces semblables en fer fondu, il faut donner des dimensions peu différentes aux diverses parties, afin que, refroidis-

393. Lorsqu'une pièce placée horizontalement, et supportant des poids, doit présenter successivement ses différentes faces à l'action de la charge, ce qui a lieu, par exemple, pour les axes horizontaux dans les machines de rotation, il est convenable que la figure de la section transversale soit telle que la résistance de la pièce à la flexion soit la même dans tous les sens. Un cylindre plein et un tuyau circulaire offrent évidemment cette propriété. D'après les nos 52 et 317, un prisme plein, à base quarrée, et un tuyau quarré, l'offrent également (*a*). Il en est de même des sections représentées figures 79 et 80. En appelant dans la première

a la dimension extérieure AB ou CD,

---

sant en même temps, elles ne tendent pas à se désunir par l'effet de la contraction de la fonte.

(*a*) Il est question de la figure la plus convenable des axes de rotation dans les *Practical essays on mill work*, par Buchanan, avec notes de M. T. Tredgold. 1823, tome I, page 262; et dans le *Practical essay on the strength of cast iron*, 1824, page 59. M. Tredgold paraît penser que le cercle est la seule figure qui donne aux axes la propriété d'offrir dans tous les sens la même résistance à la flexion. L'erreur de cet ingénieur provient de ce qu'il regarde la résistance à la flexion comme étant mesurée par l'expression qui mesure la résistance à la rupture. On avait déja remarqué qu'une section quarrée donnait la même résistance à la flexion dans le sens des côtés et dans le sens des diagonales. On voit ici que cette section donne la même résistance dans tous les sens, et qu'il en est de même d'un grand nombre de figures, que l'on peut former en combinant d'une manière symétrique le cercle et le quarré. Il en résulte que si les axes renforcés par des côtes saillantes, que les Anglais nomment axes *emplumés* (*feathered shafts*), réussissent moins bien que les axes quarrés ou cylindriques pleins, cela provient probablement de ce qu'ils ne sont pas aussi bien disposés pour résister à la torsion, et non pas des inégalités de la flexion de ces axes.

α l'épaisseur Aa, Cc de chacun des rectangles qui se croisent à angles droits,

le moment d'élasticité est, dans toutes les directions,

$$\varepsilon = E\frac{a^3\alpha + a\alpha^3 - \alpha^4}{12}.$$

Le moment de rupture, si la pièce fléchissait dans le sens des côtés des rectangles, serait

$$\rho = R\frac{a^3\alpha + a\alpha^3 - \alpha^4}{6a};$$

et si la pièce fléchissait dans le sens de la diagonale du quarré dans lequel elle est inscrite,

$$\rho = R\frac{\sqrt{2}(a^3\alpha + a\alpha^3 - \alpha^4)}{6(a+\alpha)}.$$

394. En appelant, dans la fig. 80,

a la dimension extérieure AB ou CD;

a' la dimension A'B' ou A'C';

α l'épaisseur Aa, Cc des rectangles placés en saillie sur le quarré;

le moment d'élasticité est, dans toutes les directions,

$$\varepsilon = E\frac{a'^4 + (a^3 - a'^3)\alpha + (a - a')\alpha^3}{12}.$$

Le moment de rupture, si la pièce fléchissait dans le sens des côtés, serait

$$\rho = R\frac{a'^4 + (a^3 - a'^3)\alpha + (a - a')\alpha^3}{6a};$$

et si la pièce fléchissait dans le sens de la diagonale,

$$\rho = R\frac{\sqrt{2}[a'^4 + (a^3 - a'^3)\alpha + (a - a')\alpha^3]}{6(a+\alpha)}.$$

395. Considérons maintenant une pièce posée verticalement, et chargée sur l'extrémité supérieure. Le sens de la flexion étant ici indéterminé, il convient de donner à la section transversale la figure d'un tuyau rond ou quarré, ou bien l'une des figures symétriques indiquées n° 393. Cela suppose toutefois que l'on soit assuré que l'effort s'exercera toujours exactement dans la direction de l'axe de la pièce. Il arrive quelquefois, par exemple pour les pièces inclinées servant d'arc-buttants, que l'effort tend à s'exercer sur une des faces de la pièce, et non pas dans la direction de l'axe. Dans ce cas, on peut adopter l'une des sections représentées fig. 81 et 82, dont la première a été fréquemment employée.

Nommons

a la largeur AB du rectangle dans lequel la figure est inscrite;

b la hauteur CD de ce rectangle;

α l'épaisseur CF de la côte;

β l'épaisseur AE de la face;

z la distance DM à la face AB de l'axe d'équilibre contenant les fibres dont la longueur ne varie pas lors de la flexion.

Pour connaître la valeur du moment d'élasticité de la section dont il s'agit, il faut d'abord déterminer la situation de l'axe d'équilibre, conformément aux nos 48 et 50. La condition énoncée dans le n° 48 donnera ici

$$az^2-(a-\alpha)(z-\beta)^2=\alpha(b-z)^2,$$

d'où

$$z=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\beta^2-\alpha\beta^2+\alpha b^2}{a\beta-\alpha\beta+\alpha b}.$$

L'expression du moment d'élasticité, d'après la formule du n° 50, sera

$$\varepsilon = \frac{E}{3}[az^3 - (a-\alpha)(z-6)^3 + \alpha(b-z)^3],$$

formule où l'on devra substituer pour z la valeur précédente.

D'après le n° 76, et en remarquant que la distance désignée par v' dans ce numéro est ici CM ou $b-z$, on aura pour l'expression du moment de rupture

$$\rho = \frac{R}{3} \cdot \frac{az^3 - (a-\alpha)(z-6)^3 + \alpha(b-z)^3}{b-z}.$$

De la figure de la section longitudinale.

396. Lorsqu'une pièce est prismatique, il y a généralement un des points de la longueur de cette pièce dans lequel elle est plus exposée à rompre que dans tout autre. Si la résistance est suffisante dans ce point, la pièce est, partout ailleurs, plus forte qu'il n'est nécessaire. On peut déterminer la figure d'une pièce de manière qu'elle présente partout une force suffisante, et nulle part une force excédante : les pièces dont la figure est déterminée de cette manière ont été nommées *solides d'égale résistance.* Il suffit de donner quelques exemples des recherches de ce genre, qui n'offrent aucune difficulté.

Considérons un solide encastré horizontalement à une extrémité (Fig. 83), chargé à l'autre du poids P, dont les faces latérales sont formées par deux plans verticaux parallèles, et la face supérieure par un plan horizontal. Nommant

a la largeur du solide;

b la hauteur AM à l'extrémité encastrée;

c la longueur AB;

x, v l'abscisse Bp et l'ordonnée pm de la courbe BM formant la face inférieure du solide;

R ayant la signification indiquée n° 75;

on aura d'abord, pour déterminer la hauteur du solide en AM,

$$R\frac{ab^3}{6} = Pc, \quad \text{d'où} \quad b = \sqrt{\frac{6Pc}{Ra}}.$$

On aura ensuite, pour déterminer la figure de la courbe BmM,

$$R\frac{av^2}{6} = Px, \quad \text{d'où} \quad v^2 = \frac{b^2x}{c}:$$

cette courbe est une parabole dont l'axe est BA.

397. On peut demander la figure affectée par le solide ABM fléchissant sous l'action du poids P. On a ici, pour la valeur du moment d'élasticité appartenant à l'une quelconque des sections pm, $\varepsilon = E\frac{av^3}{12} = E\frac{ab^3x^{\frac{3}{2}}}{12c^{\frac{3}{2}}}$. L'équation d'équilibre est donc, en désignant comme au n° 55 par y l'ordonnée de la courbe affectée par le solide,

$$E\frac{ab^3x^{\frac{3}{2}}}{12c^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = Px,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{E}\frac{12c^{\frac{3}{2}}}{ab^3x^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E}\frac{24c^{\frac{3}{2}}}{ab^3}\left(x^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$y = \frac{P}{E} \cdot \frac{24 c^{\frac{3}{2}}}{a b^3} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - c^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{3} c^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$f = \frac{P}{E} \cdot \frac{8 c^3}{a b^3}.$$

Cette valeur de f, ou de l'abaissement du point extrême B, est double de celle qui aurait lieu si toutes les sections du solide avaient une hauteur égale à b.

398. En supposant le solide chargé d'un poids distribué uniformément sur la longueur (Fig. 84), conservant les dénominations précédentes, et appelant

p le poids porté par l'unité de longueur,

on a

$$R \frac{a b^2}{6} = p c . \frac{c}{2}, \quad \text{d'où } b = c \sqrt{\frac{3 p}{R a}};$$

puis

$$R \frac{a v^2}{6} = p x . \frac{x}{2}, \quad \text{d'où } v = \frac{b x}{c}.$$

La face inférieure du solide est plane.

399. Le solide étant seulement chargé de son propre poids (Fig. 85), et nommant

p le poids de l'unité de volume du solide;

x l'abscisse Bp, à laquelle répond l'ordonnée v;

x' l'abscisse Bp' d'un point quelconque m', compris entre B et m, à laquelle répond l'ordonnée v';

on aura

$$p \int_0^x dx' (x - x') v' = R . \frac{v^2}{6}.$$

Différentiant deux fois de suite par rapport à x,

il vient

$$p\int_0^x dx'.v' = \frac{R}{6}.\frac{d.v^2}{dx},\ pv = \frac{R}{6}.\frac{d^2.v^2}{dx^2},$$

équation dont l'intégrale est

$$v = \frac{px^2}{2R}:$$

la courbe BM est une parabole dont l'axe est Bv.

On résout facilement les mêmes questions dans le cas où les sections transversales du solide sont toutes des cercles ayant leurs centres sur une même droite horizontale; quand ces sections sont toutes des rectangles semblables; quand la loi de leurs largeurs ou hauteurs est donnée; etc.

400. Si l'on veut rechercher, comme on a fait n° 397, la courbure qu'affecteraient les solides considérés dans les deux numéros précédents, en fléchissant sous le poids dont ils sont chargés, on trouve des équations transcendantes, donnant des valeurs infinies pour les ordonnées des points extrêmes B. Ces résultats ne peuvent être admis, puisque toutes les recherches dont on s'occupe ici sont fondées sur la supposition d'une flexion très-petite, faite n° 55. On doit les regarder comme indiquant l'impossibilité évidente d'exécuter des solides, à l'extrémité desquels les faces supérieure et inférieure sont tangentes l'une à l'autre.

401. Considérons un solide posé horizontalement sur deux appuis, et chargé en M d'un poids 2P (Fig. 86). Nommant

a la largeur du solide;

b la hauteur AM, au point où le poids est suspendu;

c la moitié CB de l'intervalle des appuis;

z la distance AC;

on aura

$$R\frac{ab^2}{6}=P\frac{c^2-z^2}{c},\ \text{d'où}\ b=\sqrt{\frac{6P(c^2-z^2)}{Rac}};$$

et les deux portions de courbe BM, B'M' appartiendront à deux paraboles dont l'axe se confond avec la ligne BB'.

402. Si l'on suppose que le poids 2P peut être suspendu en un point quelconque de l'intervalle BB', et si l'on veut que le solide résiste toujours à l'action de ce poids, l'ordonnée de la courbe de la face supérieure devra satisfaire à l'expression précédente de b. Cette expression représente une ellipse, ayant pour demi petit axe $\sqrt{\frac{6Pc}{Ra}}$; et comme l'ellipse enveloppe les courbes paraboliques qui terminent le solide lorsque l'on donne au poids des situations déterminées, ce solide, si l'on adopte cette courbe, offrira un excès de résistance partout ailleurs qu'au point de suspension du poids.

403. Lorsque le solide posé horizontalement sur deux appuis est chargé de poids distribués uniformément sur sa longueur, il doit être terminé en dessus par deux faces planes (Fig. 87); l'épaisseur au milieu CM est donnée par l'expression de b du n° 398.

404. Lorsque le solide posé horizontalement sur deux appuis est chargé seulement de son propre poids, il doit être terminé en dessus par deux portions égales de parabole (Fig. 88), dont les axes sont les lignes verticales passant par les points B, B'. L'épaisseur au mi-

lieu CM est égale à $\frac{pc^2}{2R}$, p étant le poids de l'unité de volume du solide, et c la moitié CB de l'intervalle des appuis.

405. Considérons encore un solide posé verticalement (Fig. 89), et chargé d'un poids Q sur l'extrémité supérieure, en admettant que toutes les sections transversales de ce solide soient des cercles. Nommons

c la demi-longueur AC ou BC du solide;
x, y l'abscisse Cp et l'ordonnée mp de la courbe affectée par l'axe du solide;
f la flèche CM de cette courbe;
r le rayon de la section transversale en m.

Supposant que le solide ne prenne qu'une petite courbure à l'instant où il est prêt à se rompre, on peut simplifier la question en admettant que cette courbure se confond avec un arc de parabole, ayant pour équation

$$y = f\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right).$$

L'équation d'équilibre sera

$$R\frac{\pi r^3}{4} = Qy, \text{ ou } r^3 = \frac{4Qf}{\pi R}\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right).$$

Ainsi le solide est d'égale résistance si r est proportionnel à $(c^2 - x^2)^{\frac{1}{3}}$. Le diamètre des sections diminue du milieu aux extrémités, qui sont terminées en pointe.

406. Il est souvent utile dans les constructions, en consolidant convenablement les extrémités des pièces, de se rapprocher des formes qui rendent les solides

d'égale résistance : ces formes conviennent principalement au fer fondu, et aux pièces soumises à des efforts dirigés perpendiculairement à la longueur. Quant aux pièces comprimées dans le sens de la longueur, il est utile, quand la longueur est considérable par rapport à l'épaisseur, d'augmenter cette épaisseur vers le milieu; mais on doit toujours conserver aux extrémités des dimensions telles, que la pression ne puisse les écraser. Il est même avantageux, dans beaucoup de cas, de donner à ces extrémités la forme d'une embase, qui s'applique contre les plans entre lesquels le solide est contenu. Cette disposition tend à procurer au solide l'excédant de résistance qu'il présenterait si les extrémités étaient encastrées, conformément à ce qu'on a vu n° 308.

Des pièces formées de plusieurs parties assujetties entre elles.

407. Lorsqu'une pièce est composée de plusieurs parties, la résistance dont elle est susceptible s'évalue différemment suivant la manière dont ces parties sont assujetties les unes aux autres.

Considérons, en premier lieu, un assemblage de plusieurs pièces superposées (Fig. 90), en supposant ces pièces assujetties par des brides, qui les maintiennent en contact, mais qui ne s'opposent pas à ce que les points correspondants des faces contiguës ne se déplacent les uns par rapport aux autres lorsque l'assemblage vient à fléchir. La résistance de ce système sera la somme des résistances que chacune des pièces offrirait séparément. Ainsi, la section transver-

sale des pièces étant rectangulaire, et nommant

a la largeur commune des pièces superposées;
b la hauteur de chacune;
n le nombre de ces pièces;
ε et ρ ayant les significations indiquées nos 55 et 82;
E et R ayant les significations indiquées nos 47 et 75;

l'expression du moment d'élasticité sera (no 51),

$$\varepsilon = n\mathrm{E}\frac{ab^3}{12};$$

et l'expression du moment de rupture (no 77),

$$\rho = n\mathrm{R}\frac{ab^2}{6}.$$

On fait ici abstraction de l'effet du frottement provenant de la force avec laquelle les pièces sont serrées les unes contre les autres. La résistance du système est la même, soit que l'on place les pièces les unes sur les autres dans le sens où la flexion doit s'opérer, soit qu'on les place les unes à côté des autres.

408. Si un assemblage semblable à celui dont on vient de parler était formé de pièces partagées en plusieurs parties dans le sens de la longueur (Fig. 91), on devrait regarder le moment d'élasticité de cet assemblage comme ayant des valeurs différentes dans les diverses parties. Dans la partie mm, le moment d'élasticité est la somme des moments des trois pièces superposées; dans la partie nn, il est seulement la somme des moments de deux de ces pièces. On doit, autant qu'il est possible, disposer les joints de manière qu'ils ne se rencontrent point vis-à-vis les uns des autres;

et cette condition étant remplie, on pourra regarder la résistance du système à la flexion ou à la rupture, comme étant égale à la somme des résistances des pièces superposées, moins une.

On peut même, dans quelques cas, si les joints sont placés convenablement, regarder la résistance du système comme étant égale à la somme des résistances des pièces superposées. Par exemple, dans le solide représenté Fig. 92, encastré à une extrémité, chargé à l'autre, et composé de trois pièces superposées, la résistance est au point d'encastrement la somme des résistances des trois pièces. Aux points m, n, que l'on suppose placés au $\frac{1}{3}$ et aux $\frac{2}{3}$ de la longueur, la résistance est seulement les $\frac{2}{3}$ et le $\frac{1}{3}$ de la précédente: mais comme l'action du poids P pour causer la flexion ou la rupture en ces points est également les $\frac{2}{3}$ et le $\frac{1}{3}$ de l'action de ce poids au point d'encastrement, l'assemblage offre partout une résistance au moins égale à celle qui a lieu dans ce dernier point. On pourrait évidemment supprimer ici les portions des pièces supérieure et inférieure qui sont au-delà du point n, sans altérer la résistance du système à la rupture.

409. Considérons maintenant un assemblage formé de pièces superposées (Fig. 93), dont les faces en contact sont entaillées à crémaillère, ou unies par des clefs, et qui sont fortement serrées par des brides. La résistance de cet assemblage à la flexion ou à la rupture ne différera pas sensiblement de celle qu'offrirait une seule pièce des mêmes dimensions.

410. Si un assemblage (Fig. 94) était formé de deux pièces séparées, mais assujetties entre elles de manière qu'une ligne tracée avant la flexion perpendiculaire-

ment à la longueur, devînt nécessairement après la flexion une normale commune aux deux courbes formées par les deux pièces, la résistance à la flexion s'estimerait en retranchant du moment d'élasticité du solide, regardé comme plein, le moment d'élasticité d'un solide compris entre les deux pièces. Ainsi, nommant

a la largeur commune des deux pièces;
b' la hauteur de l'assemblage;
b'' la hauteur de l'intervalle compris entre les deux pièces;

on aurait pour l'expression du moment d'élasticité

$$\varepsilon = E\,\frac{a(b'^3 - b''^3)}{12}.$$

Le moment de rupture serait

$$\rho = R\,\frac{a(b'^3 - b''^3)}{6b'}.$$

L'hypothèse sur laquelle ces formules sont fondées ne peut être réalisée, lorsque les pièces sont placées parallèlement, qu'autant que ces pièces sont assujetties l'une à l'autre par un système de traverses et de croix, ou par des clefs pénétrant dans des entailles, comme on l'a représenté fig. 94. Mais si l'une des pièces est courbée (Fig. 95), ou si elles le sont toutes les deux, et si ces pièces sont assujetties aux extrémités, de manière à ne pouvoir glisser l'une sur l'autre, il suffit qu'elles soient réunies par des traverses pour que l'on puisse évaluer la résistance du système d'après les formules précédentes. Il conviendra, dans chaque cas particulier, de régler la courbure des pièces de ma-

nière à rendre le système d'égale résistance, conformément aux principes exposés dans l'article précédent.

411. Dans les systèmes représentés fig. 94 et 95, la pièce placée du côté qui devient concave lors de la flexion résistant seulement à une compression exercée dans le sens de la longueur, peut être formée de plusieurs parties posées bout-à-bout, maintenues dans le prolongement les unes des autres. De même, la pièce placée du côté qui devient convexe lors de la flexion résistant seulement à une tension exercée dans le sens de la longueur, peut être formée de plusieurs parties, pourvu que ces parties soient attachées les unes aux autres par des assemblages offrant à la tension une résistance égale à celle de la pièce. Une division semblable des pièces supérieure et inférieure n'altérera pas sensiblement la force du système.

412. Connaissant la nature des efforts auxquels les pièces sont exposées dans les assemblages de ce genre, on peut choisir pour chacune la matière qui convient le mieux. Ce choix est déterminé par la condition d'obtenir une résistance donnée avec la moindre dépense possible. En comparant les résistances respectives du fer fondu et du fer forgé à la compression et à l'extension, avec les prix de ces matières, on reconnaîtra qu'il est toujours avantageux d'employer le fer fondu pour les pièces comprimées, et le fer forgé pour les pièces tendues. Cette disposition offre aussi plus de sécurité lorsque la construction est exposée à des secousses, parce que le fer forgé peut souvent se prêter sans rompre à une extension subite, qualité dont le fer fondu est presque entièrement dépourvu.

Le bois de chêne ou de sapin, comprimé ou tendu,

coûte beaucoup moins, à résistance égale, que le fer forgé ou fondu, et il est moins susceptible de rompre par l'effet des chocs : mais il n'offre pas la même durée lorsqu'il est exposé à l'humidité.

413. On a souvent proposé de consolider des pièces en bois avec des armatures en fer. Lorsqu'une pièce est soumise à un effort dirigé perpendiculairement à sa longueur, la meilleure disposition consiste à encastrer dans les faces latérales de cette pièce un assemblage formé d'une pièce courbe et d'un tirant rectiligne, dont les extrémités sont assujetties l'une à l'autre (Fig. 96). On peut aussi encastrer un semblable assemblage entre deux pièces de bois posées l'une à côté de l'autre, et serrées par des boulons. Si l'on suppose que le contact établi entre les points du fer et du bois se maintienne exactement lors de la flexion; ou si, pour plus de sûreté, on a consolidé l'assemblage en fer par des traverses, comme on le voit fig. 95, la résistance du système est égale à celle de la pièce de bois, plus celle de l'assemblage en fer évaluée conformément au n° 410. Le tirant rectiligne doit toujours être en fer forgé; mais il est avantageux d'employer le fer fondu pour la courbe.

Expériences sur la résistance des pièces formées de plusieurs parties assujetties entre elles.

414. D'après une expérience de M. Aubry (*a*), un barreau de bois de chêne ayant 1 pouce de largeur,

(*a*) Mémoires sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques, p. 65.

2 $\frac{1}{2}$ pouces de hauteur, posé horizontalement sur deux appuis distants de 5 pieds, et chargé au milieu, a rompu sous un poids de 755 livres produisant une flèche de 2 pouces.

Un autre barreau du même bois, ayant 1 pouce de largeur et 2 pouces de hauteur, formé de trois pièces entaillées de 3 lignes, de 6 en 6 pouces, et serrées par deux boulons de 1 $\frac{1}{4}$ ligne de diamètre; posé et chargé comme le précédent, a rompu sous un poids de 475 liv. produisant une flèche de 3 pouces 2 lignes.

D'après cette expérience, le second barreau était à peu près aussi fort que s'il eût été d'une seule pièce.

415. Les expériences de M. Duleau sur des pièces de fer forgé (*a*) offrent les résultats suivants. Les pièces étaient posées horizontalement sur deux appuis, et chargées au milieu : toutes avaient $0^m,06$ de largeur. Les boulons de $0^m,02$ de diamètre, au moyen desquels ces pièces étaient assemblées, étaient espacés de $0^m,4$. Les résultats sont ramenés par le calcul à présenter la flèche de la courbure affectée par chaque pièce sous une charge de 10 kil.

La résistance à la flexion du système formé par des pièces en croix diffère peu de celle que l'on calculerait par la formule du n° 410. Quant aux pièces simplement serrées par des boulons, la résistance est moindre, et d'autant plus que l'intervalle des pièces est plus grand; ce qui doit être attribué à la flexion des boulons (*b*).

(*a*) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, p. 40.

(*b*) On trouve quelques expériences analogues aux précédentes

INDICATION DES PIÈCES.	INTERVALLE des appuis.	HAUTEUR totale.	HAUTEUR du vide.	FLÈCHE de courbure.
	mètres.	millimètres.	millimètres.	millimètres.
Deux pièces de fer du Périgord, posées à plat, et superposées sans boulons	2	21,1	0	7
Les mêmes posées à plat, serrées par des boulons	4	21	0	11,5
Les mêmes écartées de $0^m,011$, au moyen de cales serrées par les boulons	4	32	11	4,57
Les mêmes écartées de $0^m,021$ par le même moyen	4	42	21	2,6
Les mêmes écartées de $0^m,032$ par le même moyen	4	53	32	1,8
Les mêmes écartées de $0^m,153$ au moyen de pièces en croix.	5,8	174	153	0,275
Deux pièces de fer du Périgord serrées l'une sur l'autre par des boulons	4	40	0	2,2

Des armatures servant à prolonger les pièces, ou à assujettir entre elles des pièces placées dans le prolongement l'une de l'autre.

416. Considérons en premier lieu des pièces exposées à des efforts dirigés perpendiculairement à la longueur. On peut les prolonger, ou assujettir deux pièces dans le prolongement l'une de l'autre, d'une manière parfaitement solide, en employant une portion de tuyau, dans lequel les extrémités des pièces seraient contenues et fortement serrées. Mais comme la paroi intérieure du tuyau ne serait pas pressée dans toute

dans le tome IV de l'Art de bâtir, p. 529. M. Barlow a aussi donné quelques expériences sur des modèles de poutres armées. *Essay on the strength and stress of timber*, p. 196.

son étendue, on peut en supprimer une partie, et employer des dispositions plus simples, quoique fondées sur le même principe.

Par exemple, une pièce de bois qui doit être encastrée horizontalement, peut être prolongée dans l'encastrement au moyen de deux armatures en fer fondu (Fig. 97), appliquées contre les faces latérales, et réunies en *m*, *n* par des traverses. Les faces supérieure et inférieure de la pièce doivent être serrées fortement contre ces traverses, avec des cales, ou des vis de pression. Par cette disposition, la pièce ne peut céder à un effort exercé verticalement de haut en bas qu'en rompant au-dessus de la traverse *n*.

L'armature représentée figure 98 pourrait être employée pour prolonger une pièce, à l'extrémité de laquelle un poids devrait être suspendu; et en renversant la même armature, on pourrait en former les extrémités d'une poutre, ce qui est quelquefois utile quand il s'agit de réparer des poutres dont on trouve les portées détériorées.

Enfin on pourrait, au moyen de l'armature représentée fig. 99, assujettir l'une au bout de l'autre deux pièces pour en former une, ou consolider une poutre que la charge aurait fait rompre. Mais on n'est pas assuré de réussir aussi bien dans ce dernier cas que dans le précédent, parce que l'armature se trouvant ici placée dans la partie de la pièce où elle tendrait à prendre la plus grande courbure, il faudrait un contact beaucoup plus parfait entre la pièce et l'armature pour qu'il n'y eût pas de flexion sensible (*a*).

(*a*) On peut voir un procédé pour consolider les extrémités pour-

Dans ces appareils, la résistance des armatures peut être évaluée d'après le n° 410. Il est nécessaire que les portions de surface sur lesquelles la pression s'établit soient assez grandes pour que le bois ne s'y comprime pas sensiblement. La valeur de la pression se calculera toujours facilement. Dans le cas de la fig. 97, par exemple, la pression en *m* doit faire équilibre autour du point *n* aux poids dont la pièce est chargée; la pression en *n* est égale à la somme de ces poids et de la pression qui a lieu en *m*.

417. Les deux parties d'une pièce exposée à fléchir transversalement de haut en bas peuvent encore être réunies de la manière indiquée fig. 100, au moyen d'une pièce juxtaposée en dessous, assujettie par des clefs de bois dur insérées dans des entailles, et serrées par des brides. En effet, les fibres, lors de la flexion, sont comprimées dans la partie supérieure *am* de la section transversale, et étendues dans la partie inférieure *an*. Le joint *mn* ne nuit pas à la résistance des fibres comprimées (n° 101), et la résistance des fibres étendues, qui se trouvent coupées, est suppléée par celle de la pièce appliquée en dessous. On peut déterminer la force de cette pièce par la condition que le moment de la résistance de ses fibres, pris par rapport à l'axe d'équilibre *a*, soit égal au moment des fibres coupées dans l'intervalle *an*, pris par rapport au même axe.

418. A l'égard des pièces placées dans le prolonge-

---

ries des poutres dans les *Transactions of the society of arts and manufactures*, 1802. Voyez aussi la même collection, 1824; ou le Bulletin de la société d'encouragement, juin 1825.

ment l'une de l'autre, et exposées à une tension longitudinale, on peut les assembler de la manière indiquée fig. 101, au moyen de pièces juxtaposées, assujetties par des clefs et des brides. On peut aussi employer des tirants de fer, soit en les encastrant dans le bois, comme l'indique la fig. 102, soit en les plaçant en dehors, et les fixant à des traverses. Dans tous les cas, les pièces réunies sont nécessairement affaiblies au point de jonction, la section transversale étant diminuée par l'effet des entailles. On doit donner aux tirants une force égale à celle qui reste au bois; et il faut que la surface de bois sur laquelle ces tirants prennent un appui soit assez grande pour qu'il n'y ait pas écrasement, et que l'adhésion latérale des fibres qui tendent à se détacher ne puisse être rompue.

ARTICLE VIII.

Des appareils de charpente les plus simples, destinés à supporter ou à élever des poids.

419. Les pièces de charpente sont exposées à divers genres d'effort, et peuvent être sollicitées à fléchir et à rompre d'une infinité de manières. On a considéré dans les articles précédents les cas les plus simples de l'équilibre d'une seule pièce : on se propose d'examiner, dans cet article et dans les suivants, les conditions de l'équilibre des assemblages formés de plusieurs pièces, en se bornant aux systèmes qui se présentent le plus fréquemment dans les constructions.

420. La manière la plus simple de supporter un

poids au moyen d'une seule pièce, consiste à poser ce poids sur l'extrémité supérieure de cette pièce placée verticalement. Les conditions de l'équilibre ont été traitées pour ce cas dans le n° 299. Un semblable appareil n'a pas de stabilité, à moins que la pièce verticale n'ait l'extrémité inférieure encastrée. On peut maintenir cette pièce, soit par des contreficches ou autres appuis fixes, soit en empêchant, au moyen de cordages attachés à des points fixes, l'extrémité supérieure de se déplacer. Ces cordages n'ayant d'autre objet que d'empêcher la pièce verticale de sortir de la position d'équilibre non stable où elle se trouve placée, le degré de résistance qu'on doit leur procurer n'est pas, en général, susceptible d'une évaluation exacte.

421. On peut aussi supporter un poids au moyen d'une seule pièce verticale, en suspendant ce poids à quelque distance de l'axe de la pièce. C'est ce qu'on est obligé de faire quand il s'agit, non-seulement de supporter le poids, mais de le soulever. On a traité dans le n° 321 le cas où la pièce est encastrée à l'extrémité inférieure, et où le poids est simplement supporté. Quand on veut élever le poids, on place ordinairement une poulie en C (Fig. 103), une autre en D, et l'on agit sur la corde en F. La pièce AB est alors sollicitée, non-seulement par le poids Π, mais par la tension de la corde DF. Si les distances BC, CD étaient égales, et si les tensions des cordes CΠ, DF ne différaient pas l'une de l'autre, la pièce AB se trouverait dans le même cas que si l'extrémité supérieure B était chargée d'un poids égal à la somme de ces tensions. Dans la réalité, la tension de la corde DF surpasse celle de la corde CΠ, et la pièce AB est sollicitée

à plier du côté de la première. On doit prendre la résultante des deux tensions, et appliquer les résultats des nos 321 et suivants, en mettant cette résultante à la place de la force désignée par Π dans ce numéro, et en remplaçant la distance désignée par l par la distance de la direction de la résultante à l'axe de la pièce.

La stabilité de l'équilibre tient uniquement ici à la résistance de la pièce à la flexion, et le déplacement de l'extrémité supérieure augmente le bras de levier des forces qui la sollicitent. Il est absolument nécessaire de maintenir cette extrémité par des cordages. Mais, aussi bien que dans le cas précédent, le degré de résistance de ces cordages n'est pas susceptible d'une évaluation exacte.

422. Les appareils de ce genre sont quelquefois disposés de manière que l'on agit sur la corde DF (Fig. 104) au moyen d'un treuil fixé en E à la pièce AB, et près de l'extrémité inférieure de cette pièce. Dans ce cas, les deux parties AE, BE se trouvent dans des états d'équilibre différents. La partie AE est uniquement sollicitée à fléchir par l'action du poids Π, et on peut lui appliquer les résultats des nos 321 et suivants. La partie BE est soumise à l'action du poids Π et de la tension de la corde DF. On peut, en négligeant la flexion de la partie AE, appliquer à la partie BE ce qui a été dit dans le numéro précédent.

423 Dans l'appareil représenté fig. 105, la pièce horizontale BB', chargée au milieu C du poids Π, est dans l'état d'équilibre considéré dans les nos 273 et 274. Les pièces verticales AB, A'B' supportent chacune la moitié du poids Π, et sont dans les états d'équi-

libre considérés dans les nos 299 ou 304, suivant que les extrémités inférieures de ces pièces sont simplement supportées, ou sont encastrées dans leurs appuis. Abstraction faite de la résistance des assemblages aux points B et B', l'équilibre n'est pas stable, et on doit maintenir l'appareil par des pièces inclinées, ou par des cordages.

Si le poids Π n'était pas simplement suspendu au point C, mais devait être élevé au moyen d'une corde passant dans une ou plusieurs poulies fixes attachées à ce point, il est évident qu'il faudrait regarder le point C comme étant chargé du poids Π augmenté de la tension de la corde sur laquelle on agirait pour soulever ce poids.

424. L'appareil représenté fig. 106, si la pièce horizontale BB'' était formée de deux parties séparées par un joint placé en B', présenterait simplement la réunion de deux systèmes semblables à celui que l'on vient de considérer. Les pièces verticales AB, A''B'' supporteraient chacune la moitié de l'un des poids Π, que l'on suppose égaux, et la pièce A'B' supporterait un effort égal à l'un de ces poids. Mais si la poutre horizontale BB'' est d'une seule pièce, chacune des moitiés BB', B'B'' résiste comme une pièce horizontale encastrée à une extrémité et supportée à l'autre. Par conséquent, en regardant les pièces AB, A'B', A''B'' comme des appuis inflexibles, on appliquera ici les résultats obtenus dans les nos 283 et suivants, résultats qui s'accordent avec ceux de la solution exposée dans les nos 292 et suivants. On en conclura que l'effort vertical supporté par chacune des pièces extrêmes AB, A''B'' est égal à $\frac{5}{16}\Pi$, et par conséquent que

l'effort supporté par la pièce intermédiaire A'B' est égal à $\frac{22}{16}\Pi$. L'effet de la liaison des deux parties de la pièce BB'' est donc d'augmenter sensiblement la charge du poteau A'B', en diminuant celle des deux autres.

425. Considérons encore l'appareil représenté fig. 107, où la poutre horizontale BB''', chargée des trois poids égaux Π, supportée par quatre pièces verticales également espacées, est supposée d'une seule pièce. Si l'on regarde les pièces verticales comme des appuis inflexibles, on peut apprécier la résistance que doit présenter la pièce BB''', et les efforts exercés sur chacune des pièces verticales, au moyen d'un calcul semblable à celui des n°s 288 et suivants. En effet, l'une des moitiés BC' de la poutre peut être regardée comme une pièce encastrée horizontalement à l'extrémité C', et sollicitée par trois forces verticales, agissant de bas en haut aux points B, B', et de haut en bas au point C. Nous remarquerons d'abord que dans la pièce AMM' (Fig. 49), considérée n° 288, on aurait pour la troisième partie M'M'' de cette pièce, en conservant les dénominations indiquées dans ce numéro, et déterminant les constantes de manière que, pour $x = c'$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et y fussent égales à celles données par les équations appartenant à la partie MM', les équations suivantes :

$$\varepsilon\frac{d^2y''}{dx^2} = \Pi''(c''-x),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx} = \Pi\tfrac{1}{2}c^2 - \Pi'\tfrac{1}{2}c'^2 + \Pi''(c''x - \tfrac{1}{2}x^2),$$

$$\varepsilon y = \Pi(\tfrac{1}{2}c^2x - \tfrac{1}{6}c^3) - \Pi'(\tfrac{1}{2}c'^2x - \tfrac{1}{6}c'^3) + \Pi''(\tfrac{1}{2}c''x^2 - \tfrac{1}{6}x^3).$$

Appliquons maintenant ces équations, aussi bien que celles données dans les numéros cités, à la moitié BC′ (Fig. 107) de la pièce BB‴. Désignant par

c la moitié de l'un des intervalles égaux BB′, B′B″;
Q l'effort exercé sur le poteau AB;
Q′ l'effort exercé sur le poteau A′B′;

les équations conviendront au cas dont il s'agit en écrivant Q′ au lieu de Π, Π au lieu de Π′, Q au lieu de Π″, $2c$ et $3c$ au lieu de c' et c''. Par conséquent on aura respectivement pour les parties B′C′, CB′ et BC, les équations

$$\varepsilon y = Q'(\tfrac{1}{2}cx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) - \Pi(cx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) + Q(\tfrac{3}{2}cx^2 - \tfrac{1}{6}x^3),$$
$$\varepsilon y = Q'(\tfrac{1}{2}c^2x - \tfrac{1}{6}c^3) - \Pi(cx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) + Q(\tfrac{3}{2}cx^2 - \tfrac{1}{6}x^3),$$
$$\varepsilon y = Q'(\tfrac{1}{2}c^2x - \tfrac{1}{6}c^3) - \Pi(2c^2x - \tfrac{4}{3}c^3) + Q(\tfrac{3}{2}cx^2 - \tfrac{1}{6}x^3).$$

On en déduit, en faisant successivement $x = c$, $x = 2c$, $x = 3c$, pour les ordonnées des points B′, C et B, comptées à partir de la ligne horizontale passant par le point C′,

$$\varepsilon y = (2Q' - 5\Pi + 8Q)\tfrac{1}{6}c^3,$$
$$\varepsilon y = (5Q' - 16\Pi + 28Q)\tfrac{1}{6}c^3,$$
$$\varepsilon y = (8Q' - 28\Pi + 54Q)\tfrac{1}{6}c^3.$$

Les ordonnées des points B et B′ devant être égales entre elles, on a

$$6Q' - 23\Pi + 46Q = 0.$$

Les conditions de l'équilibre entre les poids Π et les efforts exercés sur les poteaux donnent de plus

$$2Q' - 3\Pi + 2Q = 0.$$

On déduit de ces deux équations $Q = \frac{7}{20}\Pi$ pour l'effort exercé sur les poteaux extrêmes AB, A''' B'''; et $Q' = \frac{23}{20}\Pi$ pour l'effort exercé sur les poteaux intermédiaires A'B' et A''B''. L'effet de la liaison des parties de la pièce BB''' est encore ici d'augmenter la charge des poteaux intermédiaires, en diminuant celle des poteaux extrêmes.

426. Quant au degré de résistance que doit présenter la pièce BB''', on remarquera que l'on a respectivement pour les parties B'C', B'C et CB de cette pièce,

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = Q'(c-x) - \Pi(2c-x) + Q(3c-x),$$

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = -\Pi(2c-x) + Q(3c-x),$$

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = Q(3c-x);$$

ou, en remplaçant Q et Q' par les valeurs qui viennent d'être trouvées,

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{20}(4c-10x),$$

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{20}(-19c+13x),$$

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{20}(21c-7x).$$

Les points de maxima pour la courbure sont C, B' et C' : elle est la plus grande dans le premier, où l'on a $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \Pi\frac{7c}{20}$, et où la pièce tend à se rompre. Les conditions de la rupture de cette pièce sont donc exprimées, conformément au n° 275, par l'équation

$$\rho = \Pi\frac{7c}{20}.$$

On regarde ici les pièces verticales comme des appuis inflexibles. La question serait différente, et plus compliquée, si ces pièces étaient supposées flexibles ou compressibles. Mais il n'est pas nécessaire pour les applications de traiter la question de cette manière, et on n'aura point d'erreur dangereuse à craindre, en donnant aux pièces verticales des résistances proportionnées aux efforts dont les valeurs ont été trouvées ci-dessus.

427. On peut soutenir un poids au moyen d'une seule pièce inclinée, lorsque l'extrémité inférieure de cette pièce est encastrée. On a traité ce cas d'équilibre dans les n°s 327 et suivants. La fig. 108 représente un poids Π soutenu par deux pièces inclinées, dont on suppose les extrémités inférieures simplement supportées sur des appuis. En désignant par α, β les angles que les pièces AC, BC forment avec la corde verticale CΠ, les efforts résultant de l'action du poids Π, dans les directions des deux pièces, sont exprimés respectivement par

$$\Pi\frac{\sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)},\quad \Pi\frac{\sin.\alpha}{\sin.(\alpha+\beta)}.$$

Ces pièces s'appuient l'une contre l'autre en C, et la pression horizontale qui a lieu dans ce point est

$$\Pi\frac{\sin.\alpha.\sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)}.$$

Elles tendent à s'écarter l'une de l'autre en A et B, et cette même expression représente la pression horizontale qu'elles exercent contre les appuis qui les retiennent, ou la tension d'un lien AB, par le moyen duquel ces pièces seraient maintenues.

428. Si les deux pièces AC, BC forment avec la

verticale des angles égaux désignés par α, les efforts exercés dans la direction de ces pièces sont exprimés par

$$\frac{\Pi}{2\cos.\alpha},$$

et la pression horizontale par

$$\tfrac{1}{2}\Pi \operatorname{tang.}\alpha.$$

Dans les appareils dont il s'agit, les pièces inclinées sont dans l'état d'équilibre considéré n° 299, les efforts exercés dans la direction de ces pièces remplaçant la force désignée par Q dans ce numéro.

429. Dans l'appareil représenté fig. 109, la pièce AC est comprimée, et la pièce BC est étendue. La pression exercée suivant AC doit être la résultante des tensions des cordes BC et CΠ. Par conséquent, α et β désignant les angles formés par AC et BC avec la corde verticale CΠ, on aura respectivement

$$\Pi\frac{\sin.\beta}{\sin.(\beta-\alpha)} \quad \text{et} \quad \Pi\frac{\sin.\alpha}{\sin.(\beta-\alpha)}$$

pour la pression exercée suivant AC, et pour la tension de la corde BC. La pièce AC tend à glisser en A sur son appui, et la pression horizontale qu'elle exerce contre l'obstacle qui doit la retenir est

$$\Pi\frac{\sin.\alpha.\sin.\beta}{\sin.(\beta-\alpha)}.$$

Les appareils que l'on vient de considérer présentent un équilibre stable, quant aux déplacements qui pourraient avoir lieu dans le plan vertical qui contient les pièces inclinées, et la corde à laquelle le poids est

suspendu; mais il est nécessaire de les maintenir dans ce plan par des cordages.

430. Pour donner plus de stabilité au système, on remplace la pièce unique AC par deux pièces inclinées aC, a'C (Fig. 110), ce qui forme l'appareil connu sous le nom de *chèvre*. La ligne AC étant l'intersection du plan vertical qui contient les cordes BC, CΠ, avec le plan aCa', qui est perpendiculaire au premier, on désignera par α, β les angles BCΠ, ACΠ, et par γ les angles égaux aCA, a'CA. L'action du poids Π produira dans le sens de chacune des pièces aC, a'C une pression exprimée par

$$\Pi \frac{\sin.\beta}{\sin.(\beta-\alpha).2\cos.\gamma}.$$

La force avec laquelle le lien aa' est tendu est

$$\Pi \frac{\sin.\beta.\tang.\gamma}{2\sin.(\beta-\alpha)}.$$

La tension de la corde BC, et la force horizontale avec laquelle les extrémités inférieures a, a' des pièces inclinées tendent à glisser parallèlement à AB, sont exprimées par les formules données dans le numéro précédent.

431. Si, dans les appareils dont il vient d'être question, le poids Π n'était pas seulement suspendu au point C, mais soulevé au moyen d'une corde passant dans une ou plusieurs poulies fixées à ce point, on devrait, pour déterminer les efforts exercés dans la direction des pièces, considérer, au lieu du poids Π, la résultante de ce poids et de la tension de la corde à laquelle la force serait appliquée. Il faut d'ailleurs distinguer le cas représenté fig. 111, où la corde CD

qui soulève le poids Π s'enroule sur un treuil fixé en D, près de l'extrémité inférieure de la pièce AC. Dans ce cas, la partie AD de cette pièce est simplement comprimée avec l'effort résultant de l'action du poids Π, et exprimé par les formules des numéros précédents. La tension de la corde BC conserve également la valeur donnée dans ces numéros. Mais la partie CD de la pièce principale est comprimée dans le sens de sa longueur avec l'effort résultant de l'action du poids Π, augmenté de la tension de la corde CD. L'état d'équilibre de cette partie CD peut être assimilé sans erreur dangereuse à celui de la pièce considérée n° 299.

432. Lorsqu'un poids est supporté par plus de deux pièces inclinées contenues dans un même plan vertical, ou par plus de trois pièces inclinées non contenues dans un même plan, les conditions de l'équilibre laissent indéterminés, entre certaines limites, les efforts exercés suivant la direction de chacune des pièces. En effet, quoique le poids paraisse devoir être soutenu par toutes les pièces, rien n'empêche de supposer qu'il est simplement porté dans le premier cas par deux d'entr'elles, et dans le second cas par trois d'entr'elles seulement. Parmi ces pièces, celles qui sont comprimées se trouvent dans l'état d'équilibre considéré n° 299; et l'on est conduit, par les résultats de la solution exposée dans ce numéro, à les assimiler à des appuis qui ne cèdent pas tant que l'effort qu'ils supportent ne dépasse point une limite déterminée. En considérant le système de cette manière, il faut, pour que la construction donne une entière sécurité, que le plus grand effort auquel chaque pièce soit exposée, d'après les divers modes de décomposition du poids qui peuvent avoir lieu, soit au-dessous de la li-

mite dont on vient de parler. Mais il est important de remarquer que la solution du n° 299, qui apprend qu'une pièce comprimée dans le sens de la longueur ne cède point lorsque l'effort est au-dessous d'une limite donnée, prend uniquement en considération la disposition de la pièce à céder par l'effet d'une flexion. Dans la réalité, la pièce, avant de fléchir, se comprime de plus en plus par l'effet de l'élasticité de sa substance. Il convient d'avoir égard à cette circonstance, dans les questions dont il s'agit, et alors il n'y a plus rien d'indéterminé dans la manière dont l'action du poids se distribue sur les appuis.

Pour en donner un exemple, on supposera le poids Π (Fig. 112) supporté par les trois pièces inclinées A C, A′C, A″C contenues dans le même plan vertical, et l'on nommera

$\alpha, \alpha', \alpha''$ les angles formés par la direction des trois pièces avec la corde verticale C Π;

p, p', p'' les efforts exercés, par suite de l'action du poids Π, dans la direction de chacune des pièces;

F, F′, F″ les forces d'élasticité des trois pièces;

c la hauteur du point C au-dessus de la ligne horizontale A A″;

h, f les quantités dont le point C se déplace horizontalement et verticalement, par l'effet de la compression simultanée des trois pièces.

(En désignant par F la force d'élasticité de la pièce A C, on entend qu'il faudrait un poids égal à F pour allonger ou accourcir cette pièce d'une quantité égale à sa longueur actuelle, et ainsi des autres.)

Cela posé, les conditions de l'équilibre entre le poids Π et les trois pressions exercées suivant les piè-

ces donneront d'abord

$$p\cos.\alpha + p'\cos.\alpha' + p''\cos.\alpha'' = \Pi,$$
$$p\sin.\alpha + p'\sin.\alpha' + p''\sin.\alpha'' = 0.$$

De plus, le déplacement du point C étant supposé très-petit, les quantités dont les pièces AC, A'C, A''C se trouvent comprimées seront, à fort peu près, $f\cos.\alpha - h\sin.\alpha$, $f\cos.\alpha' - h\sin.\alpha'$, $f\cos.\alpha'' - h\sin.\alpha''$; et comme les longueurs de ces pièces sont respectivement $\frac{c}{\cos.\alpha}$, $\frac{c}{\cos.\alpha'}$, $\frac{c}{\cos.\alpha''}$, on aura

$$\frac{f\cos.^2\alpha - h\sin.\alpha\cos.\alpha}{c},\quad \frac{f\cos.^2\alpha' - h\sin.\alpha'\cos.\alpha'}{c},$$
$$\frac{f\cos.^2\alpha'' - h\sin.\alpha''\cos.\alpha''}{c},$$

pour les fractions de ces longueurs représentant leurs accourcissements respectifs. On en conclut les trois équations

$$p = \mathrm{F}\,.\,\frac{f\cos.^2\alpha - h\sin.\alpha\cos.\alpha}{c},$$
$$p' = \mathrm{F}'\,.\,\frac{f\cos.^2\alpha' - h\sin.\alpha'\cos.\alpha'}{c},$$
$$p'' = \mathrm{F}''\,.\,\frac{f\cos.^2\alpha'' - h\sin.\alpha''\cos.\alpha''}{c},$$

qui, réunies avec les deux précédentes, donneront les valeurs des déplacements h et f, et des efforts p, p' et p''.

433. Supposons, par exemple, les forces d'élasticité des trois pièces égales entre elles, la pièce intermédiaire A'C verticale, et les angles α, α'' égaux à 45°. Le déplacement horizontal h du point C sera nul, et

l'on pourra supprimer la seconde des deux équations d'équilibre. On aura $\cos.\alpha' = 1$, $\cos.\alpha = \cos.\alpha'' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et

$$f = \frac{\sqrt{2}.\Pi c}{F(1+\sqrt{2})},\ p = p'' = \frac{\Pi}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})},\ p' = \frac{\sqrt{2}.\Pi}{1+\sqrt{2}};$$

l'effort supporté par la pièce verticale est double des efforts supportés par les deux autres.

434. Si les trois pièces étaient placées d'un même côté par rapport à la corde verticale CΠ (Fig. 112), la première AC serait seule comprimée, et les deux autres seraient étendues. Les équations du numéro précédent conviendraient également à ce cas, en y changeant les signes de p' et p''.

435. Dans l'appareil représenté fig. 113, où les pièces inclinées AB, A'B', contenues dans le même plan vertical que la corde CΠ, supportent le poids Π au moyen de la pièce horizontale BB', il est nécessaire, pour que le système soit en équilibre, abstraction faite de la résistance des assemblages, que les pièces AB, A'B', soient également inclinées. α étant l'angle qu'elles forment avec la verticale, ces pièces sont comprimées suivant leur longueur avec la force $\frac{\Pi}{2\cos.\alpha}$, et sont dans le même état d'équilibre que la pièce considérée n° 299. Les extrémités A, A' tendent à s'écarter l'une de l'autre avec une force horizontale exprimée par $\frac{1}{2}\Pi$ tang. α.

Quant à la pièce horizontale BB', chaque moitié BC ou B'C' est dans le même cas que si elle était encastrée horizontalement en C, et sollicitée à l'extrémité B ou B' par la force dirigée suivant AB ou A'B'. Ces moi-

tiés se trouvent donc dans le même état d'équilibre que la pièce considérée n° 327, les forces désignées par P, Q, Π dans ce numéro étant ici respectivement $\frac{1}{2}\Pi$, $\frac{1}{2}\Pi$ tang. α, et $\frac{\Pi}{2\cos.\alpha}$.

436. On a considéré, n° 427, le cas d'un poids Π soutenu par deux pièces inclinées, et l'on a remarqué la nécessité de retenir les extrémités inférieures de ces pièces, qui tendent à s'écarter l'une de l'autre. On peut aussi former un appareil du même genre, en laissant les extrémités A, B (Fig. 114) libres de glisser sur le plan horizontal qui les supporte, et en plaçant à une certaine hauteur un lien horizontal EF. Dans ce nouveau système, α désignant l'angle des pièces AC, BC avec la corde verticale CΠ, ces pièces sont pressées dans le sens de la longueur avec la force $\frac{\Pi}{2\cos.\alpha}$, le lien EF supporte la tension longitudinale $\frac{1}{2}\Pi$ tang. α, et chacune des pièces AC, BC exerce en A et B sur son point d'appui un effort vertical $\frac{1}{2}\Pi$. Pour s'assurer que le poids Π ne dépasse pas la force de l'appareil, on examinera d'abord, conformément aux n°s 302 et 318, si la portion EC peut supporter sans fléchir la pression longitudinale $\frac{\Pi}{2\cos.\alpha}$. Si cette portion EC se maintient rectiligne sous cette pression, la partie AE pourra être regardée comme une pièce encastrée en E, et soumise en A à l'action oblique de la force $\frac{1}{2}\Pi$ dirigée verticalement de bas en haut. On assimilera donc cette dernière partie à la pièce considérée n° 327, en prenant $\frac{1}{2}\Pi$ pour la force désignée par Π dans ce numéro.

437. On peut supposer que, dans le système consi-

déré n° 427, et représenté fig. 108, on place, outre le lien A B, un autre lien horizontal EF, comme l'indique la fig. 114. Dans ce cas, l'effort horizontal $\frac{1}{2}\Pi$ tang. α, avec lequel les pièces tendent à s'écarter l'une de l'autre, est encore entièrement supporté par les obstacles placés en A, B, ou par le lien AB. On doit assimiler la pièce AC à celle que l'on a considérée n° 299, mais en admettant qu'un des points de cette pièce a été rendu fixe. Il résulte de l'analyse exposée dans ce numéro, où les pièces sont regardées comme des verges flexibles et non compressibles, que si le point fixe E est placé à l'un des points de division de la pièce en 2, 3, etc. parties égales, la valeur de l'effort capable de faire fléchir cette pièce deviendra 4 fois, 9 fois, etc. plus grande que s'il n'existait aucun point fixe. On doit d'ailleurs avoir égard aux notions exposées n° 318, pour apprécier le plus grand effort auquel la pièce puisse être exposée.

Le lien EF, placé dans un des points de division de la pièce AC en parties égales, ne supporte aucune tension longitudinale. En effet, quoique l'existence d'un point fixe placé de cette manière détermine dans cette pièce un mode de flexion particulier, aucun effort n'est exercé sur ce point.

Les remarques qui viennent d'être faites peuvent être appliquées à l'appareil considéré n° 435, et représenté figure 113, si l'on suppose qu'un lien horizontal soit placé à une certaine hauteur entre les pièces AB, A′B′.

438. L'appareil représenté figure 115 est formé du poids Π, suspendu à l'extrémité C de la pièce horizontale BC, qui est consolidée par la contrefiche AD. Les points A, B sont fixes, mais on suppose les pièces libres de tourner sur ces points. On nommera

l, l' les distances BD, CD;

α l'angle BAD.

Le point fixe B soutient de bas en haut un effort vertical $\Pi \frac{l'}{l}$ qui fait équilibre au poids Π autour du point D. Le point D est chargé de la somme du poids Π, et de cet effort, qui est $\Pi \frac{l+l'}{l}$. Cette charge devant être supportée par la pièce AD, il s'établit dans le sens de cette pièce la pression $\Pi \frac{l+l'}{l.\cos.\alpha}$, et en même temps dans la direction DB la tension $\Pi \frac{l+l'}{l}$ tang. α, qui est détruite par la résistance du point fixe B. Par conséquent, pour s'assurer que l'appareil est suffisamment fort pour porter le poids Π, il faut d'abord examiner si la contrefiche AD, assimilée à la pièce considérée n° 299, peut supporter la pression longitudinale $\Pi \frac{l+l'}{l \cos.\alpha}$. La pièce BC doit ensuite être regardée comme étant assujettie à passer en B et D dans des points fixes, comme étant tendue dans la partie BD par la force $\Pi \frac{l+l'}{l}$ tang. α, et sollicitée à rompre en D par une force dont le moment est $\Pi l'$, et qui tend à produire en ce point une courbure dont le rayon a pour valeur inverse $\frac{\Pi l'}{\varepsilon}$. D'après cela, si, comme au n° 322, on veut que le plus grand effort exercé sur l'unité superficielle ne dépasse pas R', on posera l'équation

$$\frac{R'}{E} = \Pi \left(\frac{(l+l') \text{ tang.} \alpha}{E\omega . l} + \frac{v' l'}{\varepsilon} \right);$$

qui devient, lorsque la section transversale est un rectangle dont a et b représentent la largeur et l'épaisseur,

$$R' = \frac{\Pi}{ab^2}\left(\frac{b(l+l')\,\text{tang.}\,\alpha}{l} + 6l'\right),$$

et qui donnera la plus grande valeur du poids Π dont on puisse charger l'appareil.

439. On supposera maintenant que la pièce horizontale BC, et la contrefiche DE (Fig. 116) sont assemblées avec une pièce verticale AB, encastrée à l'extrémité inférieure A. Ce qui a été dit ci-dessus pourra s'appliquer aux pièces BC, DE. Quant à la pièce AB, elle est sollicitée en E par la force $\Pi\,\frac{l+l'}{l\cos.\,\alpha}$ dirigée suivant DE, et équivalente à une force horizontale $\Pi\frac{l+l'}{l}$ tang. α, et une force verticale $\Pi\frac{l+l'}{l}$. La même pièce est sollicitée, en B, par la force horizontale $\Pi\frac{l+l'}{l}$ tang. α dirigée dans le sens BD, et par la force verticale $\Pi\frac{l'}{l}$ dirigée de bas en haut. Pour plus de simplicité, on supposera la courbure de la pièce AB extrêmement petite, en sorte que l'on puisse négliger les déplacements des points B, E par rapport aux longueurs des parties de la pièce (ce que l'on peut faire dans les cas ordinaires des applications). On verra alors 1° que cette pièce, comprimée longitudinalement dans l'intervalle AE par l'effort Π, est sollicitée à rompre en un point quelconque de cet intervalle par une force horizontale dont le moment est $\Pi\,(l+l')$, et qui tend par conséquent à produire une courbure dont le rayon a pour valeur inverse $\frac{\Pi(l+l')}{\varepsilon}$. La li-

mite des valeurs de Π, pour que les fibres ne supportent pas sur l'unité superficielle une pression dépassant R', sera donc, conformément à ce qu'on a vu n° 322, donnée par l'équation

$$\frac{R'}{E} = \Pi\left(\frac{1}{E\omega} + \frac{v'(l+l')}{\varepsilon}\right),$$

qui devient, lorsque la section de la pièce est rectangulaire,

$$R' = \frac{\Pi}{ab^2}[b + 6(l+l')].$$

2° Que la même pièce AB, tendue longitudinalement dans l'intervalle BE par l'effort $\Pi\frac{l'}{l}$, est sollicitée à rompre en E par une force dont le moment est $\Pi(l+l')$. La limite des valeurs de Π, pour que les fibres ne supportent pas en ce point sur l'unité superficielle une tension dépassant R', sera donc donnée par l'équation

$$\frac{R'}{E} = \Pi\left(\frac{l'}{E\omega.l} + \frac{v'(l+l')}{\varepsilon}\right),$$

qui devient, lorsque la section de la pièce est rectangulaire,

$$R' = \frac{\Pi}{ab^2}\left[\frac{bl'}{l} + 6(l+l')\right].$$

Si le point D est au milieu de BC, la pièce AB tend également à rompre dans un point quelconque de l'intervalle AE, et en E. La pièce tend à rompre dans l'intervalle AE plutôt qu'en E si BD est < CD. L'état d'équilibre de la pièce ne dépend pas de l'inclinaison de la contrefiche DE.

Par suite de la courbure qu'affecte la pièce, et dont les formules précédentes ne tiennent point compte,

les valeurs du poids Π données par ces formules seront un peu trop grandes; et la pièce tend à rompre en A plutôt qu'en tout autre point de l'intervalle AE.

440. Quelquefois la pièce AB n'est point encastrée à l'extrémité inférieure : elle est consolidée par une pièce inclinée AF (Fig. 117). Dans ce cas, tout ce qui a été dit dans les numéros précédents doit s'appliquer à la partie de l'appareil située au-dessus du point A. Quant à la partie située au-dessous de ce point, supposons d'abord la pièce AF dirigée de manière que le point F soit au-delà de la verticale passant par le point de suspension du poids Π. Nommons h la distance AA', φ l'angle A'AF, et désignons toujours par $l+l'$ la distance BC. Le poids Π tend à faire tourner la pièce A'B sur le point A', et le moment de ce poids, pris par rapport à ce point, est $\Pi(l+l')$. Il est nécessaire, pour que ce mouvement n'ait pas lieu, que la pièce AF oppose, dans le sens de sa longueur, une résistance $\Pi\frac{l+l'}{h\sin.\varphi}$. Cette force agit au point A dans la direction FA, et équivaut à une force horizontale $\Pi\frac{l+l'}{h}$, et une force verticale $\Pi\frac{l+l'}{h\,\text{tang.}\,\varphi}$ dirigée de bas en haut. Ainsi, 1° la pièce AF doit être assimilée à la pièce considérée n° 299, la force désignée par Q étant ici $\Pi\frac{l+l'}{h\sin.\varphi}$; 2° la partie AA' de la pièce verticale n'est plus comprimée suivant sa longueur qu'avec la force $\Pi\left(1-\frac{l+l'}{h\,\text{tang.}\,\varphi}\right)$.

Si maintenant la pièce inclinée est dirigée de manière que le point F se trouve en-deçà de la verticale passant par le point de suspension du poids Π, l'appareil

tendra à tourner sur le point F. La force comprimant la pièce AF sera toujours exprimée par $\Pi \frac{l+l'}{h \sin. \varphi}$, et la partie AA' de la pièce verticale sera tendue suivant sa longueur avec la force $\Pi \left(\frac{l+l'}{h \tang. \varphi} - 1\right)$. Il serait nécessaire alors que cette dernière pièce fût attachée en A' à son point d'appui.

441. L'appareil représenté fig. 118 est formé du poids Π suspendu en C au milieu de la pièce horizontale BB', dont les extrémités sont appuyées sur des points fixes, et qui est consolidée par les contrefiches AD, A'D', assemblées avec cette pièce, et appuyées elles-mêmes contre des points fixes en A et A'. La pièce BB' fléchissant sous l'action du poids Π, et les contrefiches se comprimant, l'action du poids se trouve répartie sur les quatre points fixes. La méthode employée dans diverses questions traitées précédemment pourrait faire connaître les conditions de la flexion et de la rupture de cet appareil. Mais comme, en général, il s'agit moins dans les applications de connaître le poids capable d'opérer la rupture, qu'une limite au-dessus de laquelle ce poids se trouve nécessairement, on peut ici, et dans des cas semblables, éviter de la manière suivante le calcul compliqué auquel on se trouverait conduit.

On distinguera dans l'appareil proposé deux systèmes, dont chacun supporterait seul le poids Π, et dans chacun desquels les conditions de la flexion et de la rupture peuvent être immédiatement connues : savoir, 1° la pièce BB' appuyée sur les points B, B', abstraction faite des contrefiches; 2° la portion de polygone ADD'A' appuyée sur les points A, A', abstraction faite de la

liaison de la partie DD′ de la poutre avec les parties BD, B′D′. Chacun de ces systèmes, considéré à part, étant moins fort que l'appareil proposé, on est assuré que le poids qui romprait cet appareil est plus grand que le poids qui romprait le plus fort des deux systèmes.

Si la pièce BB′, appuyée sur les points B, B′, supportait seule le poids Π, la valeur de ce poids, déterminée par la condition qu'il n'obligeât point cette pièce à rompre en C, devrait être évaluée d'après le n° 83.

Si le système ADD′A′ supportait seul le poids Π, et qu'aucun effort ne fût exercé sur les points B, B′, on se trouverait dans le cas du n° 435. Par conséquent, désignant par α l'angle BAD, 1° pour que le poids Π n'obligeât point la pièce DD′ à rompre en C, ce poids devrait être déterminé par les équations des nos 329 ou 330, où c représenterait la distance CD, et où l'on mettrait $\frac{1}{2}\Pi$ et $\frac{1}{2}\Pi \operatorname{tang.}\alpha$ à la place de P et Q; 2° pour que les contrefiches résistassent au même poids, il devrait être déterminé conformément aux nos 299 et 318, en prenant $\frac{\Pi}{2\cos.\alpha}$ pour l'effort exercé suivant la longueur de ces pièces.

Dans les applications, l'équation du n° 330 différera généralement fort peu de $R' = \frac{1}{ab^2}(Qb + 6Pc)$; ou, en remplaçant P, Q par les valeurs précédentes,

$$R' = \frac{\Pi}{2.ab^2}(b \operatorname{tang.}\alpha + 6c).$$

D'un autre côté, nommant c' la distance BD, on déduirait du n° 83, en considérant l'équilibre de la

pièce BB' soutenue sur les points B, B',

$$R' = \frac{\Pi . 6(c+c')}{2 . ab^2}.$$

Par conséquent, quand il s'agit d'une pièce rectangulaire, il suffit, pour que le système ADD'A' soit plus fort que la pièce BB', que tang. α soit $< \frac{6c'}{b}$; en supposant d'ailleurs aux contrefiches AD, A'D' une résistance suffisante.

442. On supposera maintenant la pièce horizontale BB', et les contrefiches DE, D'E' (Fig. 119) assemblées aux deux pièces verticales AB, A'B'. Si, dans cet appareil, les extrémités inférieures A, A' de ces pièces étaient simplement supportées, et pouvaient glisser librement sur leurs appuis, les contrefiches donneraient de la stabilité à l'équilibre du système, mais n'en augmenteraient pas la force, et la pièce horizontale BB' serait sollicitée à rompre en C de la même manière que si les contrefiches n'existaient pas. En effet, cette pièce est également sollicitée dans les deux cas à rompre en C par la force $\frac{1}{2}\Pi$, agissant de bas en haut au point A avec le bras de levier BC.

443. Si l'on suppose au contraire, dans l'appareil représenté fig. 119, que les extrémités inférieures A, A' des poteaux sont fixes, les efforts exercés sur ces points pourront être supposés dirigés obliquement, ce qui diminuera l'action qui tend à rompre en C la pièce BB'. On pourra appliquer à cet appareil le principe employé n° 441, en y distinguant deux systèmes, dont chacun pourrait seul supporter le poids Π, savoir: 1° la pièce BB' soutenue seulement par les po-

teaux AB, A'B'; et 2° la portion de polygone EDD'E' appuyée en E, E' contre ces mêmes poteaux.

Pour que le premier système soutienne le poids Π, il faut que ce poids ne puisse rompre la pièce BB' supportée à ses extrémités; et, de plus, que les pièces AB, A'B' résistent chacune à une pression longitudinale $\frac{1}{2}\Pi$.

Pour que le second système supporte le même poids, il faut en premier lieu que la portion de pièce DD', et les contrefiches DE, D'E' aient la force suffisante, conformément à ce qu'on a vu n° 441. On remarquera ensuite qu'il s'exerce en E, dans la direction DE, un effort $\frac{\Pi}{2 \cos. \alpha}$, équivalent à une force horizontale $\frac{\Pi \text{ tang. } \alpha}{2}$ et une force verticale $\frac{\Pi}{2}$. La force verticale est transmise au point d'appui A. La force horizontale se décompose en deux autres, appliquées aux points A et B. En nommant h, h' les distances AE, BE, on a $\frac{\Pi h' \text{ tang. } \alpha}{2(h+h')}$ pour la composante appliquée en A, qui est détruite par la résistance du point d'appui; et $\frac{\Pi h \text{ tang. } \alpha}{2(h+h')}$ pour la composante appliquée en B, qui produit une tension dans la portion de pièce BD. Par conséquent, il faut en second lieu que les portions de pièce BD, B'D' puissent résister à la tension longitudinale $\frac{\Pi h \text{ tang. } \alpha}{2(h+h')}$. Troisièmement enfin, quant aux pièces verticales AB, A'B', on peut regarder la pièce AB comme étant maintenue fixement au point E, et sollicitée à l'extrémité A par une force verticale $\frac{\Pi}{2}$,

et une force horizontale dont le moment, pour faire fléchir la pièce en E, est $\frac{\Pi hh' \text{tang.}\,\alpha}{2(h+h')}$. Le moment de la force horizontale agissant à l'extrémité B pour faire fléchir la pièce au même point E, a la même valeur. Par conséquent en négligeant, comme on l'a fait dans le n° 439, la considération de la courbure des pièces, et en se conformant au n° 322, la limite des valeurs de Π, pour que les fibres des pièces verticales AB, A'B' ne supportent pas sur l'unité superficielle, aux points de rupture E, E', des pressions surpassant R', sera donnée par l'équation

$$\frac{R'}{E} = \frac{\Pi}{2}\left[\frac{1}{E\omega} + \frac{v'.hh'\text{tang.}\,\alpha}{\varepsilon(h+h')}\right];$$

qui devient, lorsque la section transversale est rectangulaire,

$$R' = \frac{\Pi}{2ab^2}\left[b + \frac{6.hh'\text{tang.}\,\alpha}{h+h'}\right].$$

Ces formules, à raison de la courbure affectée par les pièces, donneront pour Π une valeur trop grande, mais différant très-peu de la véritable, dans les cas ordinaires des applications.

Le poids Π déterminé par la condition qu'il puisse être supporté par l'un ou l'autre des systèmes dont il vient d'être question, sera supporté, à plus forte raison, par l'appareil proposé.

De l'équilibre des grues.

444. On distingue deux espèces de grues : 1° celles dont l'axe est fixé dans le sol ou contre un mur, et ne

peut être déplacé; 2° les grues mobiles, qui sont supportées par le sol, et peuvent être transportées d'un lieu à un autre.

La figure 120 représente une grue de la première espèce, formée seulement de l'arbre AB, et de la pièce inclinée DC, assemblée à cet arbre de manière que l'angle des deux pièces ne puisse changer. L'arbre tourne à l'extrémité inférieure sur un pivot, et il est maintenu en A par un collier. La corde qui soulève le poids Π passe en C et en B sur des poulies, et s'enroule en E sur l'axe d'un treuil fixé à l'arbre AB. La tension R de la partie CB de la corde peut être un peu plus grande, ou plus petite que le poids Π, suivant que ce poids est soulevé par une poulie simple ou par un palan. Nous indiquerons par S la résultante du poids Π et de la tension R de la portion CB de la corde. La pièce CD doit être regardée comme encastrée en D, et soumise en C à l'action de la force S: on doit donc assimiler cette pièce à celle considérée n° 327, en prenant S pour la force désignée par Π dans ce numéro. En faisant abstraction de la courbure que l'arbre doit affecter, on peut regarder la partie BE de l'arbre comme une pièce encastrée en E, et sollicitée en B par la résultante des tensions des deux portions BC, BE de la corde. La partie DE résiste comme une pièce encastrée en D, et sollicitée en B par la tension R. On doit l'assimiler à la pièce considérée n° 331, en prenant R pour la force désignée par Π dans ce numéro, et DB pour la distance désignée par c. Enfin la partie AD de l'arbre résiste comme une pièce encastrée en A, et soumise à l'action du poids Π : on doit l'assimiler à la pièce considérée n° 321, en mettant pour c et l la distance AD et la distance horizontale du point C au point A.

La direction de la force S peut différer très-peu de CD, en sorte que l'assemblage en D soit très-peu fatigué. Les grues de cette espèce peuvent donc présenter une assez grande solidité.

445. On peut maintenir l'extrémité C de la pièce CD par le lien BC (Fig. 121), et alors il n'est plus nécessaire que l'assemblage en D rende invariable l'angle BDC. Dans ce cas, prenant la résultante S du poids Π et de la tension R de la portion de corde BC, on décomposera cette force en deux autres dirigées suivant CD et CB : on connaîtra ainsi la compression exercée suivant CD, et la tension exercée suivant CB. La pièce CD résiste comme celles considérées n°s 299 ou 304, suivant que cette pièce est libre ou non de tourner sur le point D. En faisant toujours abstraction de la courbure que l'arbre peut affecter, la partie BE doit être regardée comme encastrée en E, et sollicitée en B par la résultante de la tension de la portion de corde BE, de la tension R de la portion de corde BC, et de la tension du lien BC. La partie DE doit être regardée comme encastrée en D, et sollicitée en B par la tension R de la portion de corde BC, et par la tension du lien BC. La partie AD est sollicitée à rompre en A, comme il a été dit ci-dessus.

La pièce CD, qui est toujours comprimée, doit être faite en bois ou en fer fondu. Le lien BC, quand il est tendu, peut être formé simplement par des barres en fer forgé. Si la résultante S était dirigée dans l'angle BCD, les pièces CD, CB seraient toutes deux comprimées, et devraient être également capables de résister à ce genre d'effort.

446. Les grues qui reposent sur le sol, et n'y sont

point attachées, doivent être disposées de manière que la verticale contenant le centre de gravité des poids dont elles sont chargées ne sorte jamais de la base, ce qui exige ordinairement l'usage d'un contre-poids.

La figure 122 représente une grue de ce genre portée sur un chariot circulaire, ce qui permet de supprimer l'arbre. On réglera la force des pièces CD et CD' d'après le n° 431.

447. La figure 123 représente une grue dans laquelle l'arbre est supporté en A sur un pivot, et maintenu en *a* par un collier : cet arbre peut tourner. Tout le poids de l'appareil est transmis à l'arbre au point D. La pièce CC' est un simple lien horizontal, qui doit être fixé en B à l'extrémité de l'arbre. On réglera la force des pièces CD, BC, ou C'D, BC', d'après le n° 431. La partie BD de l'arbre résiste comme une pièce encastrée en D, et sollicitée en B par une force égale à la différence des tensions des deux portions BC, BC' du tirant. La partie D*a* résiste comme une pièce encastrée en *a*, et sollicitée par le poids total de l'appareil: ainsi, ayant cherché la distance à l'axe AB du centre de gravité de tous les poids qui reposent sur le point D, on assimilera cette partie D*a* à la pièce considérée n° 321, en prenant Π pour la somme de ces poids, *l* pour la distance horizontale de leur centre de gravité au point *a*, et *c* pour la distance *a*D. Enfin la partie *a*A de l'arbre est seulement pressée verticalement par la totalité des poids que cet arbre supporte.

448. Dans la grue représentée figure 124 l'arbre est fixe, et porte le poids de l'appareil sur l'extrémité supérieure B. Les pièces BC et BC' sont deux liens in-

clinés, et CC' une pièce horizontale qui doit embrasser l'arbre en D au moyen d'un collier. L'action du poids Π produit dans le lien BC une tension déterminée par la condition que la composante verticale de cette tension soit égale à Π. La pièce CD est comprimée suivant sa longueur par une force égale à la composante horizontale de la même tension. Des actions analogues s'exercent au point C'. Les pièces CD, C'D doivent être assimilées à la pièce considérée n° 299. La partie CE de la pièce CD, outre la compression produite par l'action du poids Π, et dont on vient de parler, soutient de plus une autre pression longitudinale égale à la tension de la portion de corde CE. La partie BD de l'arbre résiste comme une pièce encastrée en D, et sollicitée en B par une force égale à la résultante des tensions des liens BC, BC'. Les parties D*a* et *a*A sont sollicitées et résistent conformément à ce qu'on a vu dans le numéro précédent.

449. Nous indiquerons enfin la grue mobile représentée fig. 125, dans laquelle l'extrémité supérieure de l'arbre AB est maintenue par des haubans. Les pièces inclinées CD, C'D sont assemblées à l'extrémité inférieure de l'arbre, et sont soutenues par les liens BC, BC' attachés à l'extrémité supérieure. On déterminera, comme dans les cas précédents, les pressions longitudinales exercées sur les pièces CD, C'D, et les tensions exercées sur les liens BC, BC'. L'arbre AB est libre de se déverser d'un côté ou de l'autre, et il est sollicité à se déverser par la différence des composantes horizontales des tensions des liens BC, BC'. Il doit donc toujours s'établir dans les haubans qui maintiennent l'extrémité supérieure de cet arbre, des

tensions déterminées par la condition que les composantes horizontales de ces tensions détruisent la différence dont on vient de parler. Cette condition étant remplie, l'arbre doit être assimilé à la pièce considérée n° 299, en prenant pour la force désignée par Q dans ce numéro la somme des composantes verticales des tensions des liens BC, BC', et des tensions des haubans.

ARTICLE IX.

Des portes d'écluse.

450. Les parties des portes d'écluse supportent en même temps l'action verticale de leur propre poids, et l'action horizontale de la pression de l'eau. On considérera seulement ici les portes formées par un cadre rectangulaire, dont les côtés verticaux sont réunis par des entretoises horizontales sur lesquelles sont cloués des madriers.

De l'action de la pesanteur sur la charpente des portes d'écluse.

451. La figure 126 représente une porte dont la partie principale est le cadre BCFE. Le poteau *tourillon* BC est supporté en A sur un pivot, et maintenu en D par un collier. Le collier est ordinairement assujetti par plusieurs pièces de fer, dans la direction desquelles il s'établit des tensions. Ces tensions sont déterminées par la condition que leur résultante fasse équilibre, autour du point A, au poids de la porte, qui tend à la faire tourner sur ce point.

452. Le poteau BC étant maintenu verticalement au moyen du collier D, la totalité du poids de la porte est supportée par la partie inférieure AB de ce poteau, et par l'appui A. L'action de la pesanteur tend à détacher tout le reste de la charpente du poteau BC, en le faisant tourner sur le point B. Si l'on prévient ce mouvement, en attachant par des liens la traverse supérieure CF, ou toutes les traverses, au poteau BC, l'action de la pesanteur ne tend plus qu'à faire baisser le poteau EF, en changeant en un parallélogramme le rectangle formé par le cadre. La solidité de la construction exige 1° que la charpente de la porte ne puisse se détacher du poteau tourillon; 2° que la figure rectangulaire du cadre ne puisse être altérée.

453. Ces conditions seront satisfaites si l'on attache en C la traverse supérieure CF au poteau tourillon par un lien de fer, et si l'on place dans le cadre le *bracon* BF. Les traverses peuvent être supposées libres de tourner sur leurs points d'assemblage dans les deux poteaux. Nommant G un poids qui, suspendu au point F, aurait par rapport au point B le même moment que le poids de la porte; et φ l'angle CBF, on aura $\frac{G}{\cos.\varphi}$ pour la pression longitudinale supportée par le bracon; et G tang. φ pour la tension longitudinale supportée par la traverse supérieure CF et par le lien C.

454. On satisferait encore aux mêmes conditions par le moyen du *tirant* incliné CE, attaché en C au poteau tourillon. Les traverses peuvent toujours être supposées libres de tourner sur leurs points d'assemblage dans les deux poteaux. La tension longitudinale

supportée par le tirant est représentée par $\frac{G}{\cos. \varphi}$, en nommant φ l'angle CEF.

455. Lorsque l'on n'emploie pas de bracon ni de tirant, il est nécessaire qu'une des traverses horizontales au moins (la traverse supérieure CF, par exemple) soit assemblée avec le poteau tourillon de manière qu'elle ne puisse tourner sur le point d'assemblage. Cette condition suffit pour maintenir la figure rectangulaire du cadre. Toutes les autres traverses demeurant libres de tourner leurs points d'assemblage, la traverse ainsi assemblée supporte seule tout le poids de la charpente de la porte, le poteau tourillon excepté. Elle résiste comme une pièce encastrée horizontalement à une extrémité, et chargée de poids répartis sur sa longueur.

On obtient plus de solidité en assemblant avec le poteau tourillon, de la manière qui vient d'être indiquée, non-seulement la traverse supérieure CF, mais encore la traverse inférieure BE, ou même toutes les autres traverses. Le poids de la charpente se répartit alors sur les diverses traverses ainsi assemblées.

456. On obtient plus de solidité encore en assemblant les traverses, de manière que leur direction ne puisse varier au point d'assemblage, non-seulement avec le poteau tourillon BC, mais encore avec le poteau busqué EF.

457. D'après ce qui précède, les traverses ou entretoises, sur la longueur desquelles une partie du poids de la charpente est distribuée, peuvent se trouver dans trois conditions différentes.

1° Si elles sont assemblées dans les deux poteaux de

manière qu'elles puissent tourner librement sur leurs points d'assemblage, elles résistent comme des pièces supportées aux deux extrémités. On conclut du n° 59 que la plus grande compression ou extension des fibres, causée en un point quelconque par la flexion verticale, est

$$v'\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{v'.p}{2\varepsilon}(c^2-x^2)\ ;$$

p désignant le poids porté par l'unité de longueur, c la moitié de la longueur de la traverse, x la distance du point que l'on considère au milieu de cette longueur, ε le moment d'élasticité (la pièce étant supposée fléchir verticalement), v' la distance des fibres extrêmes comprimées ou étendues à l'axe d'équilibre tracé dans la section transversale.

458. 2° Si les traverses sont assemblées avec le poteau tourillon seulement de manière qu'elles ne puissent tourner sur le point d'assemblage, elles résistent comme des pièces encastrées horizontalement à une extrémité. On conclut du n° 58 que la plus grande compression des fibres est

$$v'\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{v'.p}{\varepsilon}\left(\frac{c^2}{2}-cx+\frac{x^2}{2}\right);$$

c désignant la longueur de la traverse, x la distance du point que l'on considère à l'extrémité encastrée.

459. 3° Si les traverses sont assemblées avec les deux poteaux de manière que leurs directions ne puissent varier aux points d'assemblage, elles résistent comme des pièces encastrées horizontalement à une extrémité, et dont l'autre extrémité est assujettie à la condition que la tangente de la courbe y demeure horizon-

tale. L'état d'équilibre de ces pièces, en supposant la charge qu'elles supportent distribuée uniformément sur leur longueur, peut être déterminé de la manière suivante.

Nommant

p le poids constant dont chaque unité de longueur de la pièce AM (Fig. 127) est chargée;

x, y les coordonnées horizontale et verticale Ap, pm d'un point quelconque m de la courbe affectée par la pièce;

c, f, l'abscisse AB et l'ordonnée MB du point extrême M;

ε ayant la signification indiquée n° 55;

l'équation d'équilibre de la pièce AM sera

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=p\left(\frac{c^2}{2}-cx+\frac{x^2}{2}\right)+\mathrm{A},$$

en désignant par A une quantité constante. On en déduit

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=p\left(\frac{c^2x}{2}-\frac{cx^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\mathrm{A}x;$$

et en déterminant la constante A de manière que l'on ait $\frac{dy}{dx}=0$ au point M où $x=c$, ce qui donne $\mathrm{A}=-\frac{pc^2}{6}$,

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=p\left(\frac{c^2x}{3}-\frac{cx^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right),$$

$$\varepsilon y=p\left(\frac{c^2x^2}{6}-\frac{cx^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right),$$

$$f=\frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{c^4}{24}.$$

L'abaissement du point extrême M est trois fois moin-

dre qu'il ne serait si ce point était entièrement libre, comme on l'a supposé n° 58. La plus grande compression des fibres est

$$v'\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{v'.p}{\varepsilon}\left(\frac{c^2}{3}-cx+\frac{x^2}{2}\right).$$

c désigne la longueur de la traverse, et x la distance du point que l'on considère à l'extrémité encastrée.

Du cas où la charpente des portes est supportée par une roulette.

460. Lorsque la charpente de la porte est supportée au moyen d'une roulette placée sous le poteau EF (Fig. 126), ou près de ce poteau, le cadre BCEF ne tend point à changer de forme. On peut supprimer le bracon BF et le tirant CE, et la solidité de la construction est suffisamment assurée si l'on attache par des liens les traverses aux deux poteaux.

461. Le poteau busqué EF étant ainsi soutenu, les traverses résistent en général aux poids dont elles sont chargées, d'une manière différente de celle qui a été indiquée dans les n°s 457 et suivants.

1° Si les traverses sont assemblées dans les deux poteaux de manière à tourner librement sur leurs points d'assemblage, on pourra appliquer ici ce qui a été dit n° 457.

462. 2° Si les traverses sont assemblées avec le poteau tourillon seulement de manière qu'elles ne puissent tourner sur le point d'assemblage, elles résistent comme des pièces encastrées horizontalement à une extrémité et supportées à l'autre. L'état d'équilibre de ces pièces peut être déterminé comme il suit.

Nommant

p le poids constant dont chaque unité de longueur de la pièce AM (Fig. 128) est chargée;

x, y les coordonnées horizontale et verticale Ap, mp d'un point quelconque m de la courbe affectée par la pièce;

c la longueur AM;

Π l'effort exercé par la pièce sur le point d'appui placé à l'extrémité M;

ε ayant la signification indiquée n° 55,

l'équation d'équilibre sera

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=p\left(\frac{c^2}{2}-cx+\frac{x^2}{2}\right)-\Pi(c-x),$$

d'où

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=p\left(\frac{c^2x}{2}-\frac{cx^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)-\Pi\left(cx-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y=p\left(\frac{c^2x^2}{4}-\frac{cx^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)-\Pi\left(\frac{cx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right).$$

Déterminant le poids Π par la condition que $y=0$ quand $x=c$, il vient $\Pi=\frac{3}{8}pc$, et

$$\varepsilon y=p\left(\frac{c^2x^2}{16}-\frac{5cx^3}{48}+\frac{x^4}{24}\right).$$

La plus grande compression des fibres est

$$v'\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{v'.p}{\varepsilon}\left(\frac{c^2}{8}-\frac{5cx}{8}+\frac{x^2}{2}\right).$$

463. 3° Si les traverses sont également assemblées avec les deux poteaux, de manière qu'elles ne puissent tourner librement sur les points d'assemblage, elles

résistent comme des pièces encastrées horizontalement aux deux extrémités. Conservant les dénominations du numéro précédent, l'équation d'équilibre sera

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=p\left(\frac{c^2}{2}-cx+\frac{x^2}{2}\right)-\Pi(c-x)+A,$$

A représentant une quantité constante. On en déduit

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=p\left(\frac{c^2x}{2}-\frac{cx^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)-\Pi\left(cx-\frac{x^2}{2}\right)+Ax,$$

$$\varepsilon y=p\left(\frac{c^2x^2}{4}-\frac{cx^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)-\Pi\left(\frac{cx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+A\frac{x^2}{2}:$$

et en déterminant les constantes Π et A, de manière que l'on ait $\frac{dy}{dx}=0$ et $y=0$ au point extrême où $x=c$, ce qui donne $\Pi=\frac{pc}{2}$, $A=\frac{pc^2}{12}$,

$$\varepsilon y=p\left(\frac{c^2x^2}{24}-\frac{cx^3}{12}+\frac{x^4}{24}\right).$$

En faisant $x=\frac{c}{2}$, on a pour l'ordonnée du point milieu, ou la flèche de courbure, $\frac{p}{\varepsilon}\frac{c^4}{384}$. En comparant ce résultat à celui du n° 59, on voit que cette flèche est 5 fois moindre qu'elle ne serait si la pièce était simplement supportée aux deux extrémités. En le comparant à celui du n° 290, on voit que la flèche de courbure est la moitié de ce qu'elle serait si le poids pc, au lieu d'être uniformément réparti sur la longueur de la pièce, était suspendu au milieu.

La plus grande compression des fibres est

$$v'\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{v'.p}{\varepsilon}\left(\frac{c^2}{12}-\frac{cx}{2}+\frac{x^2}{2}\right).$$

De l'action de l'eau sur les traverses des portes d'écluse.

464. Lorsque la porte est fermée, et supporte la pression de l'eau, les poteaux AD, EF (Fig. 126) sont appuyés dans toute leur hauteur, et par conséquent ne sont point sollicités par cette pression, qui tend seulement à fléchir les traverses assemblées dans ces poteaux. Pour évaluer l'action à laquelle les traverses sont exposées, on doit distinguer le cas des portes *simples* et celui des portes *busquées*. Dans le premier cas, l'action de la pression de l'eau sur chaque traverse peut être assimilée à celle d'un poids uniformément réparti sur la longueur d'une pièce horizontale supportée aux extrémités. On appréciera donc cette action par les nos 59 et 86. Dans le second cas, il s'établit dans le sens de la longueur des traverses une pression qui doit être prise en considération.

465. Nous supposerons ici que chaque traverse supporte la pression exercée par l'eau sur l'espace compris entre les milieux des intervalles qui existent entre cette traverse et les deux voisines; et que la même pièce supporte également l'effort exercé de la part d'une porte sur l'autre, en vertu de cette pression. Nommant p_1 l'effort résultant de la pression de l'eau sur chaque unité de longueur de la traverse, $2c$ cette longueur MM' (Fig. 128), et φ l'angle du busc CMM', on aura $p_1 2c$ pour l'effort exercé perpendiculairement sur MM', et $p_1 c$ pour les composantes de cet effort qui doivent être détruites aux extrémités M et M'. La pression que les deux traverses MM' exercent l'une contre l'autre en M' est donc une force parallèle à CM, dont la composante perpendiculaire à MM' est $p_1 c$. Ainsi cette pression est $\frac{p_1 c}{\sin. \varphi}$, et sa composante di-

rigée suivant MM' est $\frac{p_1 c}{\text{tang. } \varphi}$. Il suit de là que la pièce MM' doit être regardée comme étant appuyée à ses extrémités, et supportant à la fois le poids $2p_1 c$ distribué uniformément sur sa longueur, et la pression longitudinale $\frac{p_1 c}{\text{tang. } \varphi}$.

466. Chaque moitié de cette pièce se trouve donc dans le même état d'équilibre qu'une pièce AM (Fig. 129), encastrée horizontalement en A, chargée de poids distribués uniformément sur sa longueur, et sollicitée en M par une force verticale P agissant de bas en haut, et par la force horizontale Q. Désignant par

x, y les coordonnées horizontale et verticale Ap, pm de la courbe AM;

c la distance AB;

f l'ordonnée BM du point extrême M;

p_1 le poids porté par la pièce sur une unité de longueur;

ε ayant la signification indiquée n° 55;

l'équation d'équilibre sera

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -p_1 \left(\frac{c^2}{2} - cx + \frac{x^2}{2}\right) + P(c-x) + Q(f-y),$$

ou en remarquant que, dans le cas dont il s'agit, $P = p_1 c$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p_1}{2\varepsilon}(c^2 - x^2) + \frac{Q}{\varepsilon}(f-y).$$

L'intégrale de cette équation est

$$f - y = A \sin. \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}(x + B) - \frac{\varepsilon p_1}{Q^2} - \frac{p_1}{2Q}(c^2 - x^2),$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. On doit au point A avoir $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; et au point B, $x=c$, $y=f$; ce qui donne les trois équations

$$f=\mathrm{A}\sin.\mathrm{B}\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}-\frac{\varepsilon p_1}{\mathrm{Q}^2}-\frac{p_1c^2}{2\mathrm{Q}},$$

$$0=\mathrm{A}\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}\cos.\mathrm{B}\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}},$$

$$0=\mathrm{A}\sin.(c+\mathrm{B})\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}-\frac{\varepsilon p_1}{\mathrm{Q}^2};$$

d'où l'on déduit

$$\cos.\mathrm{B}\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}=0, \sin.\mathrm{B}\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}=1, \mathrm{A}=\frac{\varepsilon p_1}{\mathrm{Q}^2.\cos.c\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}},$$

$$f=\frac{\varepsilon p_1}{\mathrm{Q}^2}\left(\frac{1}{\cos.c\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}}-1\right)-\frac{p_1c^2}{2\mathrm{Q}};$$

et pour l'équation de la courbe,

$$y=\frac{\varepsilon p_1}{\mathrm{Q}^2}.\frac{1-\cos.x\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}}{\cos.c\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}}-\frac{p_1x^2}{2\mathrm{Q}},$$

dans laquelle on doit mettre pour Q sa valeur $\frac{p_1c}{\text{tang.}\,\varphi}$.

467. Les dimensions de la section transversale peuvent être réglées de manière à rendre la pièce capable de résister à l'action dont il s'agit, au moyen des considérations employées n° 322. La plus grande valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ a lieu au point A, et est $\frac{\text{tang.}\,\varphi}{c}\left(\frac{1}{\cos.c\sqrt{\frac{p_1c}{\varepsilon\,\text{tang.}\,\varphi}}}-1\right)$.

Par conséquent, en conservant les dénominations de

ce numéro, si l'on ne voulait pas que la plus grande pression supportée par les fibres sur l'unité superficielle surpassât R', on poserait l'équation

$$\frac{R'}{E} = \frac{p_1 c}{E\omega . \text{tang.}\varphi} + \frac{v'.\text{tang.}\varphi}{c}\left(\frac{1}{\cos. c\sqrt{\frac{p_1 c}{\varepsilon . \text{tang.}\varphi}}} - 1\right).$$

De l'action simultanée du poids de la charpente et de l'eau sur les traverses des portes d'écluse.

468. Le poids de la charpente fléchit la traverse verticalement, et l'action de l'eau la fléchit horizontalement. A raison de la petitesse des deux flexions, on peut regarder les alongements et les contractions des fibres qu'elles produisent comme étant égaux à la somme de ceux qui seraient produits séparément par chacune des flexions. Les changements de longueur des fibres dus à la flexion verticale dans les divers cas qui peuvent se présenter, ont été indiqués dans les n°s 457 et suivants. Ainsi, pour connaître la valeur totale de la compression à laquelle les fibres sont exposées, par l'effet des deux flexions, on ajoutera l'une des valeurs de $v' \frac{d^2 y}{d x^2}$ données dans ces numéros à la valeur de la même quantité déduite de l'équation du n° 466. Les valeurs de la somme varieront dans les divers points de la pièce, et il sera nécessaire que la plus grande de ces valeurs ne dépasse point la fraction $\frac{R'}{E}$, si l'on veut que le plus grand effort exercé pour comprimer les fibres sur une unité superficielle ne surpasse pas R'.

469. Par exemple, dans le cas des n°s 457 et 461, qui est celui où les traverses sont sollicitées avec le

plus de force, les plus grandes variations de longueur des fibres, dans le sens vertical et dans le sens horizontal, ont également lieu au milieu de la longueur de la pièce. La section transversale de cette pièce étant supposée rectangulaire, nommant a le côté horizontal et b le côté vertical, l'équation dont dépendront ces dimensions sera

$$\frac{R'}{E}=\frac{3pc^2}{Eab^2}+\frac{p_1c}{Eab.\text{tang.}\varphi}+\frac{a\,\text{tang.}\varphi}{2c}\left(\frac{1}{\cos.c\sqrt{\frac{12p_1c}{Ea^3b.\text{tang.}\varphi}}}-1\right).$$

470. Nommant l la distance CM (Fig. 128), on a $c=\frac{l}{2\cos.\varphi}$, et l'équation précédente devient

$$\frac{R'}{E}=\frac{3pl^2}{4Eab^2.\cos.^2\varphi}+\frac{p_1l}{2Eab.\sin.\varphi}+\frac{a\sin.\varphi}{l}\left(\frac{1}{\cos.\frac{l}{2\cos.\varphi}\sqrt{\frac{6p_1l}{Ea^3b\sin.\varphi}}}-1\right).$$

Des portes courbes.

471. On donne souvent aux portes destinées à soutenir la pression de l'eau une courbure dans le sens horizontal. Cette courbure est assez faible pour que l'on puisse appliquer à la disposition de la charpente, en la considérant comme destinée à résister à l'action verticale de la pesanteur, tout ce qui a été dit dans les nos 451 et suivants.

472. A l'égard de l'action de l'eau sur les traverses courbes, nous supposerons que la figure MEM' (fig. 130)

de ces pièces est un arc de cercle. Nommant

p_1 la pression normale exercée par l'eau sur une unité de longueur de la traverse;
l la distance CM;
c la moitié MD de la corde MM';
d la flèche DE de la courbe,
r le rayon de l'arc MEM';
φ l'angle du busc CMM' :

on a, d'après le n° 226, pour la pression résultant de l'action de l'eau, dans le sens de la longueur de la courbe, $p_1 r$, ou

$$p_1 \frac{c^2+d^2}{2d}.$$

Regardant cette courbe comme un arc appuyé à ses deux extrémités M, M' contre des points fixes, et remarquant que l'angle formé par la courbe en ces points avec MM' a pour sinus $\frac{2.cd}{c^2+d^2}$, et pour cosinus $\frac{c^2-d^2}{c^2+d^2}$, on verra que l'effort exercé par la courbe contre ces points fixes a pour composantes parallèle et perpendiculaire à MM'

$$p_1 \frac{c^2-d^2}{2d} \text{ et } p_1 c.$$

D'un autre côté, malgré leur courbure, les traverses des deux ventaux, conformément au n° 465, exercent toujours l'une contre l'autre en M' une pression $\frac{p_1 c}{\sin.\varphi}$, produisant dans la direction MM' un effort $\frac{p_1 c}{\text{tang.}\varphi}$. Par conséquent, si l'on a la relation

$$\frac{p_1 c}{\text{tang.}\varphi} = p_1 \frac{c^2-d^2}{2d},$$

d'où l'on déduit

$$d = c\frac{1-\cos.\varphi}{\sin.\varphi},\ r = \frac{c}{\sin.\varphi},$$

l'effort résultant de l'action de l'eau étant égal à celui qui résulte de l'appui que les deux ventaux se prêtent mutuellement, la traverse courbe ne tendra pas à fléchir, et sera simplement pressée dans le sens de sa longueur. Nous supposerons que la figure de la porte est déterminée conformément à cette condition. La courbe des deux ventaux est alors formée par un même arc passant par les trois points M, M', M; et la pression exercée dans le sens de la longueur de la courbe est $\frac{p_1 c}{\sin.\varphi}$.

473. D'après cela, pour régler la force des traverses de manière à résister en même temps à l'action du poids de la charpente et à la pression de l'eau, il faudra ajouter la plus grande compression causée par la flexion verticale (compression que l'on déduira de l'une des formules données nos 457 et suivants), à la quantité $\frac{p_1 c}{E\omega.\sin.\varphi}$; et égaler la somme à $\frac{R'}{E}$:

474. Par exemple, dans le cas des nos 457 et 461, on aurait ici, au lieu de l'équation du n° 469,

$$R' = \frac{3pc^2}{ab^2} + \frac{p_1 c}{ab.\sin.\varphi}.$$

475. En mettant $\frac{l}{2\cos.\varphi}$ à la place de c, cette équation devient

$$R' = \frac{3pl^2}{4ab^2\cos.^2\varphi} + \frac{p_1 l}{2ab\sin.\varphi.\cos.\varphi}.$$

En appliquant les formules précédentes, on recon-

naîtra qu'il est avantageux d'employer des traverses courbes pour la construction des grandes portes.

ARTICLE X.

Des ponts en charpente.

476. Le plancher des ponts en charpente est supporté par plusieurs fermes, qui sont formées ou d'un système de pièces droites horizontales et inclinées, ou d'un assemblage de pièces courbes composant un arc dont la convexité est tournée en haut. Le plancher est posé sur les pièces des fermes qui en supportent le poids, ou suspendu à ces pièces. On doit, dans l'établissement de ces constructions, avoir principalement égard aux conditions suivantes : 1° que l'équilibre soit stable; 2° que les pièces aient la force suffisante pour résister au poids permanent de la construction, et aux surcharges qui peuvent être réparties sur toute l'étendue du plancher; 3° que ces pièces puissent également résister aux surcharges qui seraient placées dans des points déterminés du plancher.

Des ponts supportés par des poutres et des contrefiches.

477. Le cas le plus simple est celui où, l'ouverture des travées étant peu considérable, les fermes sur lesquelles le plancher est établi ne sont formées que d'une poutre. La force de cette pièce peut être déterminée par les n°s 86 et 87, 276 et suivants.

478. Lorsque la distance des points d'appui ne permet pas d'employer seulement une poutre, on conso-

lide cette pièce par des contrefiches (Fig. 131). La pression verticale qui s'établit sur l'extrémité supérieure de ces pièces tend à les faire tourner sur leurs extrémités inférieures, et, pour prévenir ce mouvement, il s'établit nécessairement, dans la portion DD' de la poutre, une certaine pression. On peut aussi supposer le mouvement des contrefiches prévenu par l'effet d'une tension qui aurait lieu dans les portions BD, BD' de la poutre : mais il faut admettre alors que les extrémités B, B' de cette pièce sont attachées fixement aux culées. Les extrémités des poutres étant la plupart du temps simplement posées sur les culées, il est plus conforme à l'état ordinaire des constructions de supposer que la portion DD' de la poutre est comprimée.

L'assemblage des contrefiches avec la poutre aux points D, D' en diminue la force, et on ne peut lui attribuer en ces points une résistance égale à celle qu'elle présente partout ailleurs. Pour plus de simplicité, on supposera les parties de la poutre entièrement disjointes aux points D, D'. Le poids de la construction et des surcharges étant censé distribué uniformément sur l'intervalle BB', les portions BD, B'D' résistent comme des pièces supportées aux deux extrémités. Les extrémités supérieures D, D' des contrefiches sont chargées de la moitié du poids correspondant aux intervalles BD, B'D' et du poids correspondant à l'intervalle CD, CD'. Nommant

p la charge correspondante à l'unité de longueur de la poutre ;

c, c' les distances CD, BD ;

α l'angle BAD ;

on a $p(c+\frac{1}{2}c')$ pour la force verticale agissant en D, $\frac{p(c+\frac{1}{2}c')}{\cos.\alpha}$ pour la pression exercée dans le sens DA de la longueur de la contrefiche, et $p(c+\frac{1}{2}c')\,\text{tang.}\,\alpha$ pour la pression exercée dans la direction DD'. Les contrefiches AD, A'D' peuvent être assimilées aux pièces considérées n°s 299 et suivants, et on peut en régler la force d'après ce qui a été dit n°s 315 et suivants.

479. La pièce DD' doit être regardée comme étant supportée aux extrémités, comprimée dans le sens de sa longueur, et en même temps chargée du poids p sur chaque unité de sa longueur. La moitié CD de cette pièce peut être assimilée à la pièce AM (Fig. 129), encastrée horizontalement à l'extrémité A, et sollicitée de la manière indiquée n° 466. On peut donc appliquer ici l'analyse exposée dans ce numéro, en sorte que l'équation de la courbe, en écrivant p au lieu de p_1, est

$$y=\frac{\varepsilon p}{Q^2}\cdot\frac{1-\cos.x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\cos.c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}-\frac{px^2}{2Q},$$

dans laquelle on doit remplacer Q par la valeur $p(c+\frac{1}{2}c')\,\text{tang.}\,\alpha$ de l'effort exercé dans le sens de la longueur de la pièce.

On aura, comme au n° 467, pour l'équation d'après laquelle les dimensions de la pièce doivent être réglées,

$$\frac{R'}{E}=\frac{p(c+\frac{1}{2}c')\,\text{tang.}\,\alpha}{E\omega}$$
$$+\frac{\nu'}{(c+\frac{1}{2}c')\,\text{tang.}\,\alpha}\left(\frac{1}{\cos.c\sqrt{\frac{p(2c+c')\,\text{tang.}\,\alpha}{2\varepsilon}}}-1\right);$$

équation qui devient, lorsque la section de la pièce est un rectangle ayant a pour côté horizontal et b pour côté vertical, d'où $\omega = ab$, $v' = \frac{b}{2}$, $\varepsilon = E\frac{ab^3}{12}$,

$$R' = \frac{p(c+\frac{1}{2}c')\,\text{tang.}\,\alpha}{ab} + \frac{E.b}{(2c+c')\,\text{tang.}\,\alpha}\left(\frac{1}{\cos.\,c\sqrt{\frac{6p(c+c')\,\text{tang.}\,\alpha}{Eab^3}}} - 1\right).$$

480. On peut obtenir une valeur approchée, mais trop petite, de R', en supposant la courbure de la pièce DD' (Fig. 131) assez petite pour que l'on puisse négliger la flèche de cette courbure par rapport à la longueur de la pièce. L'équation d'équilibre du n° 466 se réduit alors à $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2\varepsilon}(c^2 - x^2)$, et la plus grande valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est $\frac{pc^2}{2\varepsilon}$. L'équation servant à régler les dimensions de la pièce est

$$\frac{R'}{E} = \frac{p(c+\frac{1}{2}c')\,\text{tang.}\,\alpha}{E\omega} + \frac{v'.pc^2}{2\varepsilon};$$

et devient, lorsque l'on suppose la section transversale rectangulaire,

$$R' = \frac{p}{ab}\left[\left(c+\frac{1}{2}c'\right)\text{tang.}\,\alpha + \frac{3c^2}{b}\right].$$

La valeur de R' déduite de cette équation différera très-peu, dans les cas ordinaires des applications, de celle donnée par l'équation du numéro précédent.

481. Indépendamment de la charge répartie uniformément sur l'intervalle BB' (Fig. 131), un poids Π

pourrait être placé dans un point déterminé de cet intervalle. Si ce poids était placé entre les points B et D, il exercerait sur la portion de pièce BD une action que l'on évaluerait facilement, d'après les règles exposées dans les articles précédents. Il produirait de plus un nouvel effort vertical sur le point D. Par exemple, si le poids Π était placé au point D même, la charge supportée par l'extrémité supérieure de la contrefiche deviendrait $\Pi + p(c + \frac{1}{2}c')$, en désignant toujours par p le poids réparti sur l'unité de longueur de l'intervalle BB'. La pression exercée dans le sens de la longueur de cette contrefiche serait $\frac{\Pi + p(c + \frac{1}{2}c')}{\cos.\alpha}$, et la pression exercée dans la direction D D', $[\Pi + p(c + \frac{1}{2}c')]$ tang. α. Cette dernière quantité devrait être mise à la place de Q dans l'équation du n° 479, pour régler la force de la pièce DD'. On doit remarquer d'ailleurs qne le point D' supportant seulement l'effort vertical $p(c + \frac{1}{2}c')$, et la pression exercée dans le sens D'D étant seulement $p(c + \frac{1}{2}c')$tang. α, la portion Π tang. α de la pression exercée dans le sens DD' n'est pas détruite au point D', et par conséquent est transmise à la pièce B'D'. Ainsi cette dernière pièce, appuyée sur ses extrémités, supporte maintenant la pression longitudinale Π tang. α, en même temps qu'elle est chargée du poids p sur l'unité de longueur. On doit lui appliquer les formules du n° 479, en y faisant $Q = \Pi$ tang. α.

482. Si le poids Π est placé dans l'intervalle DD', l'effort qu'il produit se répartit sur les deux points D, D'. Par exemple, si ce poids est placé au milieu C de la poutre, chacune des extrémités des contrefi-

ches supporte l'effort vertical $\frac{1}{2}\Pi + p(c + \frac{1}{2}c')$. La pression longitudinale supportée par ces pièces est $\frac{\frac{1}{2}\Pi + p(c+\frac{1}{2}c')}{\cos.\alpha}$, et la pression longitudinale supportée par la portion de pièce DD' est $[\frac{1}{2}\Pi + p(c+\frac{1}{2}c')]\tang.\alpha$. Chacune des moitiés CD de cette dernière pièce est toujours dans le même état d'équilibre que la pièce AM (Fig. 129), dont on s'est occupé n° 466, et l'équation d'équilibre est également

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = -p\left(\frac{c^2}{2} - cx + \frac{x^2}{2}\right) + P(c-x) + Q(f-y),$$

où l'on a $P = \frac{1}{2}\Pi + pc$, et $Q = [\frac{1}{2}\Pi + p(c+\frac{1}{2}c')]\tang.\alpha$. L'intégrale de cette équation est

$$f - y = A\sin.\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}(x+B) + \frac{p}{Q}\left(\frac{c^2}{2} - cx + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{P}{Q}(c-x) - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

A et B représentant deux constantes arbitraires. On doit, au point A, avoir $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; et au point B, $x = c$, $y = f$; ce qui donne les trois conditions

$$f = A\sin.B\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} + \frac{pc^2}{2Q} - \frac{Pc}{Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

$$0 = A\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\cos.B\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} - \frac{pc}{Q} + \frac{P}{Q},$$

$$0 = A\sin.\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}(c+B) - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

d'où l'on déduit

$$A\sin.B\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon p}{Q^2\cos.c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} + \frac{P - pc}{Q\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}\tang.c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}},$$

$$A\cos.B\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}=-\frac{P-pc}{Q\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}},$$

$$f=\frac{pc^2}{2Q}-\frac{Pc}{Q}+\frac{\varepsilon p}{Q^2}\left[\frac{1}{\cos.c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}-1\right]+\frac{P-pc}{Q\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}\text{tang.}c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}};$$

et en substituant dans l'équation précédente,

$$y=\frac{P-pc}{Q\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}\sin.x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$$

$$+\left[\frac{\varepsilon p}{Q^2\cos.c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}+\frac{P-pc}{Q\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}\text{tang.}c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right]\left(1-\cos.x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right)$$

$$-\frac{Px-p(cx-\frac{1}{2}x^2)}{Q},$$

où l'on doit mettre pour P et Q les valeurs précédentes.

483. La plus grande valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ répond à $x=0$, en sorte que la portion de pièce tend à se rompre au milieu : cette valeur est

$$\frac{p}{Q\cos.c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}+\frac{P-pc}{\sqrt{Q\varepsilon}}\text{tang.}c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}-\frac{p}{Q}.$$

Par conséquent, si l'on veut régler, d'après les considérations exposées n° 322, les dimensions de la pièce de manière que la plus grande pression supportée par les fibres sur l'unité superficielle ne surpasse pas R', on posera l'équation

$$\frac{R'}{E}=\frac{Q}{E\omega}+\frac{v'.p}{Q}\left[\frac{1}{\cos.c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}-1\right]+\frac{v'.\Pi}{2\sqrt{Q\varepsilon}}\text{tang.}c\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}},$$

dans laquelle on mettra pour Q la valeur.....
$[\frac{1}{2}\Pi + p(c + \frac{1}{2}c')]$ tang. α.

Cette équation, lorsque la section transversale de la pièce est un rectangle ayant a pour largeur et b pour hauteur, devient

$$R' = \frac{Q}{ab} + \frac{E.pb}{2Q}\left(\frac{1}{\cos.c\sqrt{\frac{12Q}{Eab^3}}} - 1\right) + \frac{3\Pi}{ab^2\sqrt{\frac{12Q}{Eab^3}}}\,\text{tang.}\,c\sqrt{\frac{12Q}{Eab^3}}.$$

484. On peut ici, comme au n° 480, avoir une expression approchée de R', en négligeant dans l'équation d'équilibre le terme $Q(f-y)$. La plus grande valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est alors $-\frac{pc^2}{2\varepsilon} + \frac{Pc}{\varepsilon}$, et par conséquent

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v'(Pc - \frac{1}{2}pc^2)}{\varepsilon},$$

ou, en mettant pour P et Q leurs valeurs,

$$\frac{R'}{E} = \frac{[\Pi + p(2c + c')]\,\text{tang.}\,\alpha}{2E\omega} + \frac{v'(\Pi c + pc^2)}{2\varepsilon};$$

équation qui devient, lorsque la section transversale de la pièce est supposée rectangulaire,

$$R' = \frac{[\Pi + p(2c + c')]\,\text{tang.}\,\alpha}{2ab} + \frac{3(\Pi + pc)c}{ab^2}.$$

485. Le système représenté fig. 131, en supposant que les contrefiches peuvent tourner librement sur les points d'assemblage qui en forment les extrémités, et que les extrémités B, B' de la poutre sont simplement posées sur des appuis, ne présente pas un équilibre sta-

ble. Il est donc nécessaire de prévenir les changements de figure, et l'on emploie ordinairement pour cet objet les moises BE, B'E'. Ces pièces peuvent servir aussi à fortifier les contrefiches, en s'opposant à ce qu'elles fléchissent dans le sens du plan des fermes.

486. Lorsque la distance des points d'appui est trop grande pour que l'on puisse faire la poutre d'une seule pièce, on assemble les contrefiches aux extrémités d'une soupoutre placée dans l'intervalle DD' (Figure 132). Dans ce cas, la soupoutre et les parties correspondantes de la poutre sont ordinairement liées l'une à l'autre de manière à se fortifier mutuellement. En supposant toujours les parties de la poutre disjointes aux points D, D', on pourra appliquer à ce système tout ce qui a été dit ci-dessus. Il convient seulement de remarquer, 1° que l'on doit avoir égard au poids de la soupoutre en évaluant les efforts verticaux exercés aux points D, D'; 2° que la pression longitudinale exercée dans l'intervalle DD' ne peut guère être transmise à la poutre, et doit être supportée entièrement par la soupoutre. D'où il résulte qu'en appliquant les équations des n°s 479 et 480, 483 et 484, on doit, dans le premier terme du 2e membre, mettre pour ω l'aire de la section transversale de la soupoutre seule, tandis que l'on peut évaluer dans les autres termes le moment ε dans la supposition que la poutre et la soupoutre résistent ensemble à la flexion, d'après les indications données n°s 407 et suivants.

487. Lorsque la distance des points d'appui est considérable, on peut employer un système analogue en mettant plusieurs rangs de soupoutres et de contrefiches (Fig. 133). Nous supposons toujours, pour plus

de simplicité, les parties des poutres et soupoutres disjointes aux points $D, D_1, D_2, \ldots$. On évaluera facilement les efforts verticaux qui s'exercent sur les extrémités supérieures de chacune des contrefiches, les pressions qui en résultent dans le sens de la longueur de ces pièces, et les pressions qui en résultent également dans le sens de la longueur des soupoutres. On déterminera la résistance de chaque partie du système d'après ce qu'on a vu dans les numéros précédents.

Les contrefiches pouvant exiger des pièces très-longues, ou formées de plusieurs parties mises les unes au bout des autres, il est nécessaire ici d'en prévenir la flexion, non-seulement par le moyen des moises pendantes contenues dans le plan de la ferme, mais par des pièces horizontales et inclinées liant les fermes les unes aux autres. L'usage des moises pendantes est d'ailleurs nécessité par le défaut de stabilité de l'équilibre, comme on l'a remarqué n° 485.

488. Si l'on supposait, comme cela a été indiqué n° 478, les contrefiches maintenues par l'effet d'une tension établie des culées aux extrémités supérieures de ces pièces, on pourrait disposer un système de soupoutres et de contrefiches de la manière indiquée fig. 134. La solidité de ce système exige que les parties dont chaque soupoutre est formée soient attachées les unes aux autres par des liens de fer, et que les extrémités de ces soupoutres soient attachées aux culées. Comme il est difficile d'attacher solidement ces pièces à la partie supérieure d'une culée, le système dont il s'agit paraît convenir principalement à un pont composé de plusieurs travées, parce que les deux moitiés des travées adjacentes à une même pile pourraient se faire mutuellement équilibre.

489. En supposant toujours les joints des parties des poutres et soupoutres placés aux points D, D_1, D_2....., on évaluera facilement, comme ci-dessus, les pressions exercées dans le sens de la longueur de chaque contrefiche, et les tensions supportées par les soupoutres. Pour régler en conséquence la force de ces dernières pièces, il faut connaître les conditions de l'équilibre d'une pièce qui serait supportée aux deux extrémités, chargée de poids distribués sur sa longueur, et tendue dans le sens de cette longueur.

Chaque moitié de cette pièce peut être assimilée à la pièce AM (Fig. 129) encastrée horizontalement en A, chargée de poids distribués sur sa longueur, et sollicitée en M par la force verticale P agissant de bas en haut, et par la force horizontale Q, dirigée de manière à exercer une tension dans le sens AB. Nommant

p le poids porté par la pièce sur chaque unité de longueur ;

x, y les coordonnées horizontale et verticale Ap, mp de la courbe AM ;

c la distance AB ;

f l'ordonnée BM du point extrême ;

ε ayant la signification indiquée n° 55 ;

l'équation d'équilibre sera

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -p\left(\frac{c^2}{2} - cx + \frac{x^2}{2}\right) + P(c-x) - Q(f-y),$$

ou, comme l'on a ici $P = pc$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2\varepsilon}(c^2 - x^2) - q^2(f-y),$$

en écrivant, pour abréger, q^2 à la place de $\frac{Q}{\varepsilon}$.

L'intégrale de cette équation est

$$f-y=Ae^{qx}+Be^{-qx}+\frac{p}{2Q}(c^2-x^2)-\frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

A et B représentant deux constantes arbitraires, et e la base des logarithmes hyperboliques. On doit au point A avoir $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; et au point B, $x=c$, $y=f$, ce qui donne les trois conditions

$$f=A+B+\frac{pc^2}{2Q}-\frac{\varepsilon p}{Q^2},$$
$$0=A-B,$$
$$0=Ae^{qc}+Be^{-qc}-\frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

d'où l'on déduit

$$A=B=\frac{\varepsilon p}{Q^2\left(e^{qc}+e^{-qc}\right)},$$
$$f=\frac{pc^2}{2Q}-\frac{\varepsilon p}{Q^2}\left(1-\frac{2}{e^{qc}+e^{-qc}}\right);$$

et pour l'équation de la courbe,

$$y=\frac{px^2}{2Q}-\frac{\varepsilon p}{Q^2}\cdot\frac{e^{qx}+e^{-qx}-2}{e^{qc}+e^{-qc}}.$$

490. La plus grande valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, qui a lieu au point A, est $\frac{p}{Q}\left(1-\frac{2}{e^{qc}+e^{-qc}}\right)$. On aura donc, comme au n° 322, pour l'équation servant à régler les dimensions de la section transversale,

$$\frac{R'}{E}=\frac{Q}{E\omega}+\frac{v'.p}{Q}\left(1-\frac{2}{e^{qc}+e^{-qc}}\right),$$

dans laquelle on doit substituer pour Q la valeur de la tension longitudinale à laquelle la pièce est exposée.

491. Si l'on supposait la courbure de la pièce très-petite, et que l'on négligeât en conséquence le terme $Q(f-y)$ dans l'équation différentielle, le résultat ne différerait pas de celui qui a été donné n° 480.

492. Si l'on veut maintenant, comme on l'a fait n° 482, considérer le cas où un poids Π serait placé sur le milieu de la pièce courbe, on devra conserver à l'équation différentielle la forme générale

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=-p\left(\frac{c^2}{2}-cx+\frac{x^2}{2}\right)+P(c-x)-Q(f-y),$$

et l'intégrale sera

$$f-y=Ae^{q(c-x)}+Be^{-q(c-x)}-\frac{p}{Q}\left(\frac{c^2}{2}-cx+\frac{x^2}{2}\right)$$
$$+\frac{P}{Q}(c-x)-\frac{\varepsilon p}{Q^2}.$$

Les conditions relatives aux points extrêmes donneront

$$f=Ae^{qc}+Be^{-qc}-\frac{pc^2}{2Q}+\frac{Pc}{Q}-\frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

$$0=Aqe^{qc}-Bqe^{-qc}-\frac{pc}{Q}+\frac{P}{Q},$$

$$0=A+B-\frac{\varepsilon p}{Q^2};$$

d'où l'on déduit

$$A=\frac{\varepsilon p}{Q^2}\cdot\frac{e^{-qc}}{e^{qc}+e^{-qc}}-\frac{P-pc}{qQ\left(e^{qc}+e^{-qc}\right)},$$

$$B=\frac{\varepsilon p}{Q^2}\cdot\frac{e^{qc}}{e^{qc}+e^{-qc}}+\frac{P-pc}{qQ\left(e^{qc}+e^{-qc}\right)},$$

$$f=\frac{Pc}{Q}-\frac{pc^2}{2Q}-\frac{\varepsilon p}{Q^2}\left(1-\frac{2}{e^{qc}+e^{-qc}}\right)-\frac{P-pc}{qQ}\cdot\frac{e^{qc}-e^{-qc}}{e^{qc}+e^{-qc}};$$

et en substituant dans l'équation précédente,

$$y=\frac{Px-p(cx-\frac{1}{2}x^2)}{Q}-\frac{\varepsilon p}{Q^2}\cdot\frac{e^{qx}+e^{-qx}-2}{e^{qc}+e^{-qc}}$$
$$-\frac{P-pc}{Q}\cdot\frac{e^{qc}-e^{-qc}-e^{q(c-x)}+e^{-q(c-x)}}{e^{qc}+e^{-qc}}.$$

493. La plus grande valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, qui répond à $x=0$, est

$$\frac{p}{Q}\left(1-\frac{2}{e^{qc}+e^{-qc}}\right)+\frac{P-pc}{qQ}\cdot\frac{e^{qc}-e^{-qc}}{e^{qc}+e^{-qc}}.$$

On aura donc, comme ci-dessus, pour l'équation servant à régler les dimensions de la section transversale,

$$\frac{R'}{E}=\frac{Q}{E\omega}+\frac{v'.p}{Q}\left(1-\frac{2}{e^{qc}+e^{-qc}}\right)+\frac{v'(P-pc)}{qQ}\cdot\frac{e^{qc}-e^{-qc}}{e^{qc}+e^{-qc}},$$

dans laquelle on doit substituer à la place de P et Q leurs valeurs, conformément à ce qu'on a vu nos 481 et 482.

494. L'équation du no 484 peut être appliquée au cas dont il s'agit, lorsque l'on suppose la courbure de la pièce très-petite.

495. Dans les derniers systèmes que l'on vient de considérer, les extrémités des soupoutres étant attachées à des points fixes, l'équilibre est stable, et les moises qui lient les contrefiches les unes aux autres ne sont utiles que pour prévenir la flexion de ces pièces.

496. La fig. 135 indique une autre disposition des contrefiches, d'après laquelle aucune action n'est exercée dans le sens de la longueur des sommiers du plancher. Supposant toujours les parties des sommiers disjointes aux points D, D_1, D_2,...., chacune de ces parties DD', DD_1, D_1D_2,..... résistera à la charge placée dans l'intervalle correspondant du plancher comme une pièce supportée à ses extrémités. Les efforts exercés verticalement aux points D, D_1, D_2..... se décomposeront dans le sens des deux contrefiches qui partent de ces points, et produiront sur chacune de ces pièces des pressions longitudinales.

Ce dernier système n'étant point sollicité à changer de figure, quelle que soit la distribution de la charge, présente par lui-même un équilibre stable. Mais l'emploi des moises pendantes indiquées sur la figure serait nécessaire, en général, pour s'opposer à la flexion des contrefiches, et soutenir le poids de ces pièces en les tenant suspendues aux points D, D_1, D_2,.....

De l'action des ponts formés de poutres et de contrefiches sur les piles ou culées.

497. Lorsque les fermes sont formées d'une seule poutre, comme on l'a supposé n° 477, les extrémités de cette poutre exercent seulement un effort vertical sur leurs points d'appui, effort que l'on évalue facilement d'après les lois de l'équilibre du levier.

498. Dans le cas du n° 478, les points d'appui A et A' (Fig. 131) supportent chacun un effort vertical égal à l'effort vertical exercé sur les extrémités supérieures D, D' des contrefiches; et de plus, un effort horizontal égal à la pression longitudinale supportée par la pièce DD'. Les points B, B' supportent un effort vertical dû au poids réparti dans les parties BD, B'D'.

Lorsqu'il y a plusieurs contrefiches, l'extrémité inférieure de chacune de ces pièces exerce toujours contre la culée de semblables efforts verticaux et horizontaux. La somme des efforts horizontaux exercés contre chaque culée est égale à la somme des pressions longitudinales supportées par les pièces placées dans l'intervalle DD' (Fig. 133).

Les efforts horizontaux tendent à écarter les culées; les efforts verticaux tendent à les maintenir sur leurs bases. L'action par laquelle les culées pourraient être renversées est mesurée par la différence des moments des efforts verticaux et horizontaux, pris par rapport à l'axe autour duquel tournerait la masse de ces culées.

499. Dans le cas du n° 488, les extrémités inférieures des contrefiches exercent toujours contre les culées les mêmes efforts verticaux et horizontaux dont il vient d'être question. Mais de plus, la partie supérieure de ces culées, à laquelle les soupoutres doivent être attachées, est sollicitée par l'effet des tensions longitudinales supportées par ces pièces. La somme de ces tensions horizontales est égale à la somme des pressions horizontales exercées par les extrémités inférieures des contrefiches; et comme les premières forces agissent pour faire tourner la masse de la culée avec

des bras de levier plus grands que les secondes, la culée est ici sollicitée à se renverser en dedans.

500. Dans le cas du n° 496, l'extrémité inférieure de chaque contrefiche exerce contre la culée un effort vertical et un effort horizontal, égaux aux composantes verticale et horizontale de la pression longitudinale supportée par la contrefiche. La somme des efforts verticaux exercés par les contrefiches DA, DA' qui partent d'un même point D est égale à l'effort vertical exercé en D; et les efforts horizontaux exercés par ces mêmes contrefiches sont égaux entre eux.

501. On peut, dans le système du n° 487, supprimer toute action horizontale contre les points d'appui, au moyen d'un tirant dont la tension résisterait à la poussée des contrefiches (Fig. 136). Dans ce cas le tirant, suspendu aux poutres et aux contrefiches, supporte ordinairement le plancher du pont (*a*).

Des ponts supportés par des arcs.

502. Nous regarderons d'abord les arcs qui forment la partie principale des fermes, dans les ponts de cette espèce (Fig. 137 et 138), comme un corps homogène, auquel on peut appliquer les résultats exposés ci-dessus, article VI.

Si le poids de la construction et les surcharges placées sur le plancher étaient distribués uniformément dans l'intervalle BB', la figure qu'il faudrait donner à la pièce courbe, pour qu'elle n'eût aucune tendance

(*a*) Le pont de Schaffhouse était disposé sur ce principe, aussi-bien que le pont de Wettingen, la plus grande arche en charpente qui ait existé.

à fléchir, serait, conformément au n° 358, un arc de parabole. Dans la réalité, les parties situées près les extrémités sont un peu plus chargées que celles qui sont situées au milieu, et on donne ordinairement à ces pièces la figure d'un arc de cercle. Mais, eu égard à l'épaisseur de la pièce et au peu d'amplitude de sa courbure, on peut la regarder comme n'étant nullement sollicitée à fléchir par l'effet du poids de la construction et d'une surcharge distribuée uniformément sur le plancher, et supportant seulement une pression longitudinale, dont on calculera la valeur par les formules des nos 356 et 357. La valeur de Q donne la pression horizontale exercée par l'arc contre les points d'appui.

503. Si, indépendamment d'une charge répartie uniformément sur l'intervalle BB', un poids était placé au sommet C de la courbe, l'arc cesserait d'être en équilibre. On connaîtrait par les nos 377 et 378 l'action exercée par ce poids pour augmenter la pression horizontale contre les points d'appui, et la pression longitudinale dans les différentes parties de l'arc. On pourrait évaluer ensuite, par le n° 383, l'action du poids pour faire fléchir l'arc, et les plus grands efforts que ces parties auraient à supporter.

504. Le milieu C de l'intervalle BB' n'est pas le lieu où un poids exerce la plus grande action pour fléchir l'arc. Il est donc nécessaire de rechercher les conditions de l'équilibre, en supposant le poids placé en un point quelconque de cet intervalle.

Considérons la pièce courbe MCM' (Fig. 139) formée de deux parties symétriques séparées par l'axe vertical AC, et dont les extrémités M, M', situées sur

une même ligne horizontale, sont portées par des appuis qui ne leur permettent pas de s'écarter l'une de l'autre. Si l'on suspend un poids 2Π en un point quelconque N de la pièce courbe, ce poids fléchira cette pièce, obligera le point N à se déplacer, et exercera de certains efforts verticaux et horizontaux contre les points d'appui. Chacune des parties NM, NM' de la pièce se trouvera alors dans le même état d'équilibre que si, la pièce étant supportée en N par un appui fixe, on avait appliqué aux extrémités M, M' des forces égales aux efforts supportés par les points d'appui. Les déplacements des extrémités, qui auraient lieu dans ce dernier cas, répondent aux déplacements du point N qui ont lieu dans le premier. On peut trouver les conditions de l'équilibre de chacune des parties de la pièce en appliquant les formules du n° 364; il faut seulement remarquer qu'ici la pièce étant simplement supportée en N sur un appui, la direction de la courbe en ce point n'est pas déterminée d'avance, comme elle l'est pour une pièce courbe encastrée à l'extrémité supérieure. On nommera

a, b les distances AM, AC;

α la distance horizontale CD du point N au sommet de la courbe;

x, y les coordonnées horizontale et verticale des points de la courbe, comptées du point N.

La courbe, supposée de figure paraboliquc, aurait pour équation, en comptant les coordonnées du point C, $y=\frac{bx^2}{a^2}$. Les coordonnées étant ici comptées du point N, l'équation de la partie NM est $y=\frac{b}{a^2}(2\alpha x+x^2)$,

d'où $\frac{dy}{dx} = \frac{2b}{a^2}(a+x)$. Substituant ces valeurs dans les formules du n° 364, où l'on écrira $\frac{b}{a^2}(a^2-\alpha^2)$ à la place de b, et négligeant les puissances supérieures de $\frac{dy}{dx}$, il vient pour la partie NM de la courbe

$$dx'-dx=-\frac{1}{\varepsilon}dx\frac{2b}{a^2}\left[\mathrm{P}\left\{\left(a-\alpha\right)\alpha x+\left(a-\frac{3\alpha}{2}\right)x^2-\frac{x^3}{2}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{Q}b}{a^2}\left\{\left(a^2-\alpha^2\right)\alpha x-\alpha^2x^2+\left(a^2-\alpha^2\right)x^2-\frac{4\alpha x^3}{3}-\frac{x^4}{3}\right\}\right],$$

$$dy'-dy=\frac{1}{\varepsilon}dx\left[\mathrm{P}\left\{\left(a-\alpha\right)x-\frac{x^2}{2}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{Q}b}{a^2}\left\{\left(a^2-\alpha^2\right)x-\alpha x^2-\frac{x^3}{3}\right\}+m\right],$$

m étant une constante introduite par l'intégration, et dont la valeur dépend de l'inclinaison que la courbe doit prendre sur l'appui N. On en déduit

$$x'-x=-\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{2b}{a^2}\left[\mathrm{P}\left\{\left(a-\alpha\right)\frac{\alpha x^2}{2}+\left(a-\frac{3\alpha}{2}\right)\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{Q}b}{a^2}\left\{\left(a^2-\alpha^2\right)\frac{\alpha x^2}{2}+\left(a^2-2\alpha^2\right)\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha x^4}{3}-\frac{x^5}{15}\right\}\right],$$

$$y'-y=\frac{1}{\varepsilon}\left[\mathrm{P}\left\{\left(a-\alpha\right)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{Q}b}{a^2}\left\{\left(a^2-\alpha^2\right)\frac{x^2}{2}-\frac{\alpha x^3}{3}-\frac{x^4}{12}\right\}+mx\right];$$

et en faisant $x=a-\alpha$ pour connaître les déplacements h et f du point M,

$$-h=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{2b}{a^2}\left[\mathrm{P}\left(\frac{5a^4}{24}-\frac{a^3\alpha}{2}+\frac{a^2\alpha^2}{4}+\frac{a\alpha^3}{6}-\frac{\alpha^4}{8}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{Q}b}{a^2}\left(\frac{4a^5}{15}-\frac{a^4\alpha}{2}+\frac{a^2\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^5}{10}\right)\right],$$

$$f=\frac{1}{\varepsilon}\left[\mathrm{P}\left(\frac{a^3}{3}-a^2\alpha+a\alpha^2-\frac{\alpha^3}{3}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{Q}b}{a^2}\left(\frac{5a^4}{12}-a^3\alpha+\frac{a^2\alpha^2}{2}+\frac{a\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}\right)-m(a-\alpha)\right].$$

Les mêmes formules conviendront à la partie NM′ de la courbe, en changeant le signe de α et celui de m. Par conséquent, désignant par P_1, Q_1 les forces appliquées au point M′, et par h_1, f_1 les déplacements de ce point, on aura

$$-h_1=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{2b}{a^2}\left[\mathrm{P}_1\left(\frac{5a^4}{24}+\frac{a^3\alpha}{2}+\frac{a^2\alpha^2}{4}-\frac{a\alpha^3}{6}-\frac{\alpha^4}{8}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{Q}_1 b}{a^2}\left(\frac{4a^5}{15}+\frac{a^4\alpha}{2}-\frac{a^2\alpha^3}{3}+\frac{\alpha^5}{10}\right)\right],$$

$$f_1=\frac{1}{\varepsilon}\left[\mathrm{P}_1\left(\frac{a^3}{3}+a^2\alpha+a\alpha^2+\frac{\alpha^3}{3}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{Q}_1 b}{a^2}\left(\frac{5a^4}{12}+a^3\alpha+\frac{a^2\alpha^2}{2}-\frac{a\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}\right)-m(a+\alpha)\right].$$

505. Dans la question dont il s'agit, on a $\mathrm{P}=-\Pi\frac{a+\alpha}{a}$; $\mathrm{P}_1=-\Pi\frac{a-\alpha}{a}$; $\mathrm{Q}=\mathrm{Q}_1$; et il est nécessaire que $h=-h_1$ et $f=f_1$. On déduit des équations exprimant ces conditions

$$m=-\frac{\Pi}{a}\left(\frac{2a^2\alpha}{3}-\frac{2\alpha^3}{3}\right)+\frac{\mathrm{Q}b}{a^2}\left(a^2\alpha-\frac{\alpha^3}{3}\right),$$

$$\mathrm{Q}=\frac{5\Pi}{32}\cdot\frac{5a^4-6a^2\alpha^2+\alpha^4}{a^3b},$$

$$h=-h_1=\frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{(19a^8-60a^6\alpha^2+66a^4\alpha^4-28a^2\alpha^6+3\alpha^8)b\alpha}{96a^7},$$

$$-f=-f_1=\frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{3a^8+104a^6\alpha^2-102a^4\alpha^4-5\alpha^8}{384a^5},$$

formules qui font connaître la pression horizontale exercée contre les appuis, et le déplacement du point N où le poids 2Π est suspendu.

506. Quant à l'action de ce poids pour comprimer et faire fléchir la pièce courbe, on remarquera d'abord, conformément au n° 380, que si cette pièce, en même temps qu'elle est chargée au point N du poids 2Π, supporte le poids p sur chaque unité de longueur de l'intervalle MM', la valeur de la pression T sera donnée par l'expression du n° 357, à laquelle on ajoutera l'expression du n° 365, en y mettant pour P et Q les valeurs précédentes. On aura donc pour la partie NM de la pièce, en négligeant toujours le quarré de $\frac{b}{a}$,

$$T = \frac{pa^2}{2b} + \Pi\frac{2b(a+\alpha)(\alpha+x)}{a^3} + \frac{5\Pi}{32}\cdot\frac{5a^5-6a^3\alpha^2+a\alpha^4}{a^4b}.$$

On remarquera ensuite que

$$v'\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds} = \frac{v'}{\varepsilon}\left[P\left(a-\alpha-x\right)+\frac{Qb}{a^2}\left(a^2-\alpha^2-2\alpha x-x^2\right)\right],$$

formule où l'on devra substituer pour P et Q les valeurs précédentes. Ces deux expressions serviront à déterminer les dimensions de la pièce courbe, conformément à ce qu'on a vu dans le n° 380. Elles conviendront à la partie NM' de cette pièce en changeant le signe de α.

507. Le point de la partie NM de la courbe où la courbure subit le plus grand changement a pour abscisse $x = -\alpha - \frac{Pa^2}{2Qb}$. En substituant cette valeur

dans l'expression précédente, il vient

$$\frac{v'}{\varepsilon}\cdot\frac{(\mathrm{P}a+2\,\mathrm{Q}b)^2}{4\,\mathrm{Q}b}$$

pour la valeur maximum de cette expression; ou en remplaçant P et Q par les valeurs données n° 503,

$$\frac{v'\Pi}{\varepsilon}\,\frac{(9\,a^4-16\,a^2\alpha-30\,a^2\alpha^2+5\,\alpha^4)^2}{160\,a^3\,(5\,a^4-6\,a^2\alpha^2+\alpha^4)}.$$

La valeur de cette formule se réduit à $\frac{v'\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{81\,a}{800}$ lorsque $\alpha=0$, ou quand le poids 2Π est suspendu au sommet C de la pièce courbe. Elle augmente lorsque α augmente négativement à partir de zéro, en sorte que la partie NM de la courbe est sollicitée plus fortement à fléchir lorsque le point de suspension N est placé à gauche du point C, qu'elle ne l'est quand ce point se confond avec le point C. La distance au sommet C du point où il faut placer le poids 2Π pour produire la plus grande flexion est un peu moindre que les $\frac{2}{5}$ de l'intervalle AM', et la plus grande valeur de l'expression précédente est, à très-peu près, $\frac{v'\Pi}{\varepsilon}\cdot 0,177\,a$. Ainsi, il existe deux situations du poids 2Π pour lesquelles la pièce courbe est sollicitée plus fortement à fléchir, dans le rapport de 18 à 10 environ, qu'elle ne l'est lorsque ce poids est suspendu au sommet de la courbe.

508. Dans la plupart des ponts en bois (Fig. 136) ou en fer (Fig. 137) formés par un arc, on emploie des contrefiches qui concourent avec l'arc à soutenir le poids des parties du plancher voisines des culées. Ces pièces peuvent être dirigées parallèlement à l'arc,

ou vers un point placé immédiatement au-dessus des naissances de l'arc. Elles seraient peu utiles si la construction devait seulement supporter une charge répartie uniformément dans l'intervalle des points d'appui. Mais, comme les ponts sont destinés à supporter des fardeaux qui occupent successivement les diverses parties de cet intervalle, l'usage des contrefiches est avantageux, en ce qu'il diminue l'action exercée sur l'arc, dans le cas où cette action tend à le fléchir avec le plus de force. On ne doit point oublier que les actions verticales exercées aux extrémités supérieures des contrefiches produisent, conformément à ce qu'on a vu n° 478, des pressions dirigées dans le sens de la longueur des sommiers, auxquelles ces dernières pièces doivent être capables de résister (*a*).

509. Lorsque les arcs sont formés de plusieurs cours de pièces courbes en bois, on peut regarder la

(*a*) Dans plusieurs ponts en bois ou en fer, supportés par un arc, les moises pendantes ou autres pièces par lesquelles le poids du plancher est transmis à l'arc, sont inclinées suivant des directions normales à la courbe. Il s'établit alors aux extrémités supérieures de ces pièces, des pressions ou des tensions horizontales dirigées dans le sens des sommiers; et aux points où les mêmes pièces portent sur l'arc, des pressions horizontales égales aux premières, et dirigées vers le milieu de l'arche. Ainsi l'arc est alors sollicité, non-seulement par l'action verticale du poids de la construction, mais encore par des actions horizontales qui n'existent pas quand les moises pendantes sont placées verticalement. On peut remarquer aussi que, lorsque les pièces qui transmettent à l'arc le poids du plancher sont perpendiculaires sur cet arc, ce poids n'est pas réparti uniformément sur l'intervalle compris entre les culées. La partie du milieu de l'arc est plus chargée, et celles voisines des culées le sont moins, ce qui exige de la part de cet arc une plus grande résistance.

pression longitudinale comme étant également répartie sur toutes ces pièces. Le moment d'élasticité ε doit être évalué conformément aux n°s 407 et suivants, en ayant égard à ce que chaque cours de pièces courbes est ordinairement partagé en plusieurs parties dans le sens de la longueur. Ces cours de pièces étant placés en contact les uns sur les autres, serrés par des brides, et les joints étant distribués de manière qu'ils ne se rencontrent pas vis-à-vis les uns des autres, le moment d'élasticité est partout au moins égal à la somme des moments d'élasticité de chaque pièce, moins un de ces moments. Si ces pièces ne sont pas simplement posées les unes sur les autres, mais entaillées à cremaillères, ou assemblées avec des clefs (comme l'indique la fig. 93), et si les joints sont croisés comme on vient de le dire, le moment d'élasticité, dans les parties les plus faibles, différera peu de celui d'un solide d'une seule pièce, ayant pour hauteur la somme des hauteurs des pièces, moins une.

510. Dans les ponts en fer, les arcs sont ordinairement formés par deux cours de pièces courbes, dont les parties sont liées d'un cours à l'autre par des montants normaux et des croix. Les parties placées les unes au bout des autres, dans chaque cours, doivent être réunies par des liens en fer forgé, fortement serrés, qui présentent à la tension une résistance égale à celle de ces parties. Un arc ainsi formé peut être regardé comme un corps d'une seule pièce, dont le moment d'élasticité ε s'évaluera conformément au n° 410. La pression longitudinale peut être supposée également répartie sur les deux cours de pièces courbes.

De la liaison des fermes dans les ponts en charpente.

511. A l'exception des cas indiqués n° 485, les constructions dont on s'est occupé ci-dessus présentent un équilibre stable, quant aux changements de figure qui peuvent avoir lieu dans le plan vertical de chaque ferme. Mais l'équilibre n'est point stable à l'égard des déplacements des parties de la ferme qui auraient lieu d'un côté ou de l'autre de ce plan. Il faut excepter seulement le cas où les sommiers, dirigés en ligne droite d'une culée à l'autre, seraient formés de pièces attachées les unes au bout des autres, et fixées aux culées.

Cette dernière condition n'étant presque jamais remplie, il est indispensable de prendre des précautions pour maintenir les fermes dans leurs plans respectifs. On y parviendrait en plaçant d'une ferme à l'autre des pièces horizontales, nommées entretoises, et les assemblant à leurs extrémités avec les pièces des fermes, de manière que l'angle qu'elles forment avec le plan de ces fermes ne puisse varier. Par cette disposition une ferme ne pourrait se déverser, en tournant sur ses points d'appui, sans que toutes les autres ne prissent le même mouvement, et sans que toutes les entretoises ne fussent rompues aux deux extrémités (*a*).

(*a*) Cette disposition est principalement applicable aux ponts en fer. L'expérience du pont d'Austerlitz, à Paris, dont les arches ont plus de 32m d'ouverture, prouve que l'emploi des contrevents n'est pas indispensable. On n'avait point placé de contrevents dans la grande arche en fer fondu, de 72m d'ouverture, qui forme le pont de Sunderland, mais on y a ajouté, postérieurement à la construction, quelques liens dirigés diagonalement.

512. On maintient les fermes, d'une manière encore plus sure, en ajoutant aux entretoises des pièces dirigées diagonalement dans leurs intervalles. On peut placer ces pièces, nommées contrevents, entre les arcs, dans les plans inclinés qui contiennent les contrefiches, dans le plancher, et dans les plans verticaux ou normaux qui contiennent les moises pendantes. L'effet des contrevents tient à ce que les fermes ne peuvent se déverser sans qu'une partie de ces pièces ne s'accourcisse et que l'autre ne s'allonge. Leurs extrémités doivent être attachées aux pièces des fermes avec des liens de fer fortement serrés. Au moyen des contrevents il n'est plus nécessaire, pour la stabilité de l'équilibre, que les entretoises soient assemblées avec les pièces des fermes de manière que l'angle ne puisse varier au point d'assemblage, mais il faut toujours que les extrémités des entretoises soient attachées aux pièces des fermes.

513. Les principales causes du déversement des fermes d'un pont sont l'action du vent, et les secousses qui peuvent être imprimées lors du passage des voitures. On ne peut les apprécier avec assez d'exactitude pour soumettre au calcul l'établissement des pièces destinées à prévenir ce déversement.

ARTICLE XI.

Des cintres en charpente servant à la construction des voûtes.

514. L'établissement des cintres exige la connaissance des efforts qu'ils ont à supporter pendant la construction de la voûte.

On distingue deux espèces principales de cintres : 1° ceux qui sont soutenus sur des points d'appui distribués dans l'intervalle des culées; 2° ceux que l'on nomme cintres retroussés, et qui sont entièrement supportés par des points d'appui pris au pied des culées, sous les naissances de la voûte.

Des efforts exercés sur les cintres par l'effet du poids des voussoirs.

515. Lorsque l'on construit une voûte, chaque assise ou cours de voussoirs est posé sur une pièce de bois horizontale nommée couchis, qui s'appuie sur les pièces supérieures des fermes du cintre. Les couchis exercent sur ces pièces des efforts dirigés dans le sens des joints des voussoirs, et dont il s'agit de connaître la valeur.

Considérons la portion de voûte représentée fig. 140, appuyée sur un cintre. L'un quelconque des voussoirs, tel que ABDC, supporte de la part du voussoir placé immédiatement au-dessus une pression normale au joint AB. De plus, comme ce dernier voussoir tend à glisser le long de AB, et que la force du cintre qui le retient n'est pas égale à celle qui tend à l'entraîner le long de AB, mais est diminuée par les résistances provenant du frottement et de la cohésion qui ont lieu sur ce joint, il s'ensuit que le voussoir ABCD est encore sollicité, dans la direction BA, par une force égale à ces résistances. Enfin ce même voussoir est sollicité verticalement par son propre poids. Nous pouvons le considérer comme un corps appuyé contre le plan incliné CD, sollicité par les trois forces dont on vient de parler, et retenu par une force provenant de la résistance du cintre, que nous supposerons pa-

rallèle au joint CD. D'après cela, nommant

G_1, G_2, G_3,.... G_n les poids des 1er, 2e, 3e,.... n^e voussoirs, en comptant du voussoir supérieur, pour une unité de longueur de la voûte;

α_1, α_2, α_3,..... α_n les angles formés par les joints inférieurs des mêmes voussoirs avec une ligne verticale;

z_1, z_2, z_3,..... z_n les longueurs des joints inférieurs des voussoirs;

T_1, T_2, T_3,..... T_n les pressions normales qui ont lieu sur ces joints inférieurs;

R_1, R_2, R_3,..... R_n les efforts exercés sur le cintre parallèlement aux joints inférieurs de chaque voussoir;

f et γ ayant les valeurs indiquées n° 211;

et remarquant 1° que la force T_{n-1}, perpendiculaire à AB, se décompose perpendiculairement et parallèlement à CD dans les deux forces $T_{n-1}\cos.(\alpha_n-\alpha_{n-1})$, et $-T_{n-1}\sin.(\alpha_n-\alpha_{n-1})$; 2° que la résistance provenant du frottement et de la cohésion sur le joint AB est $fT_{n-1}+\gamma z_{n-1}$, et que cette force, dirigée suivant BA, se décompose perpendiculairement et parallèlement à CD dans les deux forces $(fT_{n-1}+\gamma z_{n-1})\sin.(\alpha_n-\alpha_{n-1})$, et $(fT_{n-1}+\gamma z_{n-1})\cos.(\alpha_n-\alpha_{n-1})$; 3° que le poids G_n du voussoir ABCD se décompose perpendiculairement et parallèlement à CD dans les deux forces $G_n\sin.\alpha_n$ et $G_n\cos.\alpha_n$: on voit d'abord que la pression normale exercée par le voussoir ABCD sur le joint inférieur CD est

$$T_n=T_{n-1}[\cos.(\alpha_n-\alpha_{n-1})+f\sin.(\alpha_n-\alpha_{n-1})]$$
$$+\gamma z_{n-1}\sin.(\alpha_n-\alpha_{n-1}),+G_n\sin.\alpha_n;$$

et l'on a de plus, pour l'équation exprimant les con-

ditions de l'équilibre de ce voussoir,

$$R_n = -T_{n-1}(1+f^2)\sin.(\alpha_n - \alpha_{n-1})$$
$$+\gamma z_{n-1}[\cos.(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - f\sin.(\alpha_n - \alpha_{n-1})]$$
$$+G_n(\cos.\alpha_n - f\sin.\alpha_n) - \gamma z_n.$$

516. Au moyen de ces équations, on calculera facilement les pressions désignées par R, en commençant par le voussoir supérieur, et remarquant que $T_0 = 0$, et $\gamma z_0 = 0$, en sorte que l'on a pour ce voussoir

$$T_1 = G_1 \sin.\alpha_1,$$
$$R_1 = G_1(\cos.\alpha_1 - f\sin.\alpha_1) - \gamma z_1.$$

517. Si l'on suppose nulle la force de cohésion, comme il convient de le faire dans la plupart des applications, les équations du n° 515 deviennent

$$T_n = T_{n-1}[\cos.(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + f\sin.(\alpha_n - \alpha_{n-1})] + G_n \sin.\alpha_n,$$
$$R_n = -T_{n-1}(1+f^2)\sin.(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + G_n(\cos.\alpha_n - f\sin.\alpha_n);$$

et l'on a pour le voussoir supérieur

$$T_1 = G_1 \sin.\alpha_1,$$
$$R_1 = G_1(\cos.\alpha_1 - f\sin.\alpha_1).$$

518. On voit, par ces formules, que la pression normale exercée sur le cintre par un même cours de voussoirs varie continuellement à mesure que la construction de la voûte fait des progrès. Le premier cours de voussoirs qui commence à charger le cintre, est celui dont l'inclinaison est telle que l'on a tang. $\alpha_1 < \frac{1}{f}$ (Voyez pour les valeurs de f les nos 205 et suivants, et 235). Quand on vient à poser de nouveaux cours de voussoirs, la pression exercée sur le cintre par celui-

ci diminue, et peut même devenir nulle, ou négative. Il en est de même à l'égard des voussoirs suivants; et c'est par cette raison que, lorsqu'on abaisse le cintre d'une voûte avant qu'elle ne soit fermée, on voit quelquefois se soutenir en l'air un certain nombre de voussoirs, qui portaient sur le cintre lorsqu'on les avait posés (*a*). Chaque cours de voussoirs exerce la plus grande pression possible lorsqu'il n'est pas encore recouvert par l'assise suivante. La pression qu'il exerce diminue après la pose de cette assise; elle diminue de nouveau après la pose de l'assise qui recouvre celle-ci; et ainsi de suite.

519. Pour avoir une connaissance complète des actions exercées sur un cintre, et des divers états d'équilibre par lesquels cette construction doit passer pendant la pose des voussoirs, il est donc nécessaire de calculer, par les formules des n°s 515 ou 517, les diverses valeurs que prend successivement la pression normale exercée par chaque cours de voussoirs, à mesure que ce cours est recouvert d'un plus grand nombre d'autres. Mais si l'on veut se borner à connaître, pour chaque point de la courbe du cintre, une limite que la pression normale exercée en ce point ne puisse dépasser, il suffira de calculer la pression exercée par chaque cours de voussoirs, dans l'hypothèse où ce cours est le dernier posé; c'est-à-dire que l'on emploiera la formule

$$R_n = G_n(\cos.\alpha_n - f\sin.\alpha_n) - \gamma z_n;$$

ou, en négligeant la cohésion,

$$R_n = G_n(\cos.\alpha_n - f\sin.\alpha_n).$$

(*a*) Voyez ci-dessus n° 232 et suivants, ainsi que les ouvrages cités dans les notes.

De l'établissement des cintres.

520. L'objet que l'on doit se proposer, quand on construit une voûte, est que chaque voussoir placé sur le cintre demeure dans la même situation, jusqu'à ce que la voûte ayant été fermée, et le cintre abaissé, l'ensemble des voussoirs se maintienne de lui-même en équilibre. La voûte, pendant et après le décintrement, peut, sans inconvénient, subir un léger tassement, produit par l'élasticité de la matière des voussoirs, et par la compression du mortier ou des cales placés dans les joints. Mais un déplacement quelconque des voussoirs, qui aurait lieu avant que la voûte ne fût fermée, ne peut qu'être nuisible. D'après cela, les cintres doivent être disposés de manière que pendant la durée de la pose, le système ne tende point à changer de figure, et que les pièces ne soient pas sollicitées à tourner sur leurs points d'assemblage.

521. La figure 141 représente un cintre porté sur des points d'appui placés dans l'intervalle des culées. Les efforts exercés par les voussoirs, perpendiculairement à la courbe du cintre, sur les pièces DD_1, D_1D_2,.... sont transmis aux points d'appui par les poteaux DE, D_1E_1, D_2E_2,.... dirigés dans le sens de ces efforts. On peut, sans erreur sensible, assimiler les pièces DD_1, D_1D_2,... à une pièce chargée de poids distribués sur sa longueur, et portée horizontalement sur ses deux extrémités. Il sera facile, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, de calculer l'effort exercé sur chacune de ces pièces, ainsi que les pressions qui en résultent dans la direction des poteaux DE, D_1E_1,.....

522. Ce système demeurera en équilibre, et ne

tendra point à changer de figure pendant toute la durée de la construction de la voûte. Si les points B, B' sont fixes, et si les trois pièces qui s'assemblent aux points D, D_1, D_2,.... y sont attachées les unes aux autres, l'équilibre est stable, lors même que l'on suppose toutes les pièces libres de tourner sur les points d'assemblage. Il serait utile néanmoins de placer quelques écharpes ou entretoises, comme on l'a indiqué sur la figure : ces pièces consolideraient les poteaux, en s'opposant à ce qu'ils fléchissent dans le sens du plan de la ferme (*a*).

523. Lorsque les points d'appui doivent être pris au pied des culées, le cintre peut être disposé de la manière indiquée figure 142. L'effort exercé par les voussoirs, perpendiculairement à la courbe du cintre, est transmis par les pièces DD_1, D_1D_2, ... aux points D, D_1, D_2,.... où ces pièces s'assemblent les unes aux autres. Les efforts normaux exercés au point D se décomposent dans le sens de la contrefiche DA et de l'entretoise horizontale DD'. La pression qui en résulte dans le sens de la contrefiche est détruite par la résistance du point d'appui A, et la pression dirigée dans le sens de l'entretoise est détruite par une pression égale provenant de l'effort exercé au point D'. Une décomposition semblable a lieu aux points D_1, D_2,... Les pièces DD_1, D_1D_2,... sont dans le même état que dans le système considéré n° 521, et l'on calculera facilement les pressions longitudinales supportées par les contrefiches et les entretoises.

(*a*) On trouve le dessin d'un cintre disposé sur ce principe dans les *Reports* de Smeaton, tome III, page 349.

524. Ce système demeurera en équilibre, et ne sera point sollicité à changer de figure pendant toute la durée de la construction de la voûte, si l'on pose en même temps les voussoirs des deux côtés. En admettant les suppositions indiquées n° 522, l'équilibre est stable. Les pièces DE, D_1E_1, D_2E_2, .. indiquées sur la figure ne sont utiles que pour consolider les entretoises et les contrefiches, et en reporter le poids sur les points D, D_1, D_2....

525. On peut encore disposer un cintre retroussé de la manière indiquée figure 143. Dans ce cas, les efforts normaux exercés au point D sont immédiatement transmis aux points d'appui par les contrefiches DA, DA'; et ainsi des autres points D_1, D_2.... Les contrefiches ne supportent que des pressions longitudinales qu'il est aisé de calculer.

526. Dans ce dernier système l'équilibre est stable, et le cintre n'est pas sollicité à changer de figure, lors même qu'il y a plus de voussoirs posés d'un côté que de l'autre. Les pièces DE, D_1E_1, ... ont le même objet que dans le cas précédent (*a*).

(*a*) Il paraît que le principe de cette disposition a été appliqué pour la première fois au pont de Black-friars, construit à Londres, en 1769, par M. Mylne, et dont l'arche du milieu a 100 pieds anglais d'ouverture. *A system of Mechanical philosophy*, par Robison, tome I, page 687. M. Rennie a disposé de la même manière les cintres des arches du pont de Waterloo, dont l'ouverture est de 120 pieds anglais. Voyez la IIIe partie des Voyages dans la Grande-Bretagne, de M. Ch. Dupin, *Tredgold's Principles of Carpentry*, et les dernières Encyclopédies anglaises. Les voûtes de ces deux ponts, celles du dernier surtout qui est construit en granit, étaient très-pesantes, les voussoirs ayant plus de 6 pieds de hauteur.

527. On peut appliquer aux cintres ce qui a été dit à l'égard des ponts en charpente, n° 511 et suivants, sur la nécessité de lier les fermes entre elles.

ARTICLE XII.

Des planchers.

528. Nous distinguerons principalement, 1° les planchers formés par des solives parallèles, portées sur les murs, ou soutenues par des poutres traversant d'un mur à l'autre; 2° les planchers formés par des pièces qui ne traversent point d'un mur à l'autre, et qui sont assemblées les unes aux autres; 3° les planchers formés de plusieurs couches de planches jointives, assemblées à rainures et languettes, dont les directions se croisent, et qui sont clouées les unes sur les autres.

Les planchers de la première espèce ne comportent pas de recherches spéciales. On pourra toujours, d'après les résultats présentés n°s 57 et suiv., 84 et suiv., comparer la résistance des pièces aux charges qu'elles auront à supporter.

529. La disposition des planchers de la deuxième espèce, appelés ordinairement *planchers d'assemblage*, peut être variée à l'infini. L'objet que l'on se propose est d'exécuter la construction avec des pièces dont la longueur soit moindre que l'intervalle des murs. On considérera seulement l'une des dispositions les plus simples, indiquée figure 144. Ce système, formé de quatre pièces disposées symétriquement dans un cadre quarré, peut être supposé chargé par des poids distribués uniformément dans toute l'étendue du cadre,

On peut aussi le supposer chargé par un seul poids placé au centre, et dont l'action serait transmise aux quatre points désignés par C, C'. Dans tous les cas, si la charge est disposée symétriquement, l'effet de cette charge sera de faire fléchir le système de manière que les quatre points B, B, B', B' s'abaisseront de quantités égales, et demeureront contenus dans un même plan horizontal. Il suit de là que, considérant à part les deux pièces AB, AB, et les poids qu'elles supportent, on peut les regarder comme formant un système, dans lequel ces pièces seraient assujetties l'une à l'autre de manière que les points B et B' demeureraient nécessairement au même niveau lors de la flexion. On peut dire la même chose des pièces A'B', A'B'.

Nous supposerons qu'un poids 4Π est placé au centre du cadre, et qu'il en résulte un effort vertical Π en chacun des points C, C, C', C'. Les extrémités A, A, A', A' des pièces exerceront chacune sur le point du cadre qui les supporte un effort Π. On peut donc rechercher les conditions d'équilibre de l'appareil proposé en regardant le système des deux pièces AB, AB comme étant supporté aux points C, C sur un axe fixe, et chargé aux extrémités A, A de deux poids Π.

530. D'après cela on considérera deux pièces égales M*n*, *m*N (fig. 145), chargées aux extrémités M, *m* des poids Π. Ces pièces se croisent sur la longueur N*n*. L'extrémité de la première est assujettie au point *n* de la seconde, et l'extrémité de la seconde est assujettie au point N de la première. Les deux pièces portent en C sur un axe horizontal fixe. Le poids Π suspendu en M tend à faire tourner la pièce M*n* sur le point C; mais ce mouvement est empêché parce qu'un certain

effort s'exerce de haut en bas sur le point N, et qu'un effort égal s'exerce de bas en haut sur le point n de cette pièce, par suite de l'action du poids Π suspendu en m, et de la liaison des deux pièces. Nous pouvons donc regarder la portion CM de la première pièce comme étant encastrée en C, suivant une direction qu'il faudra connaître, et sollicitée en M par le poids Π, en N par l'effort dont on vient de parler. Nous pouvons regarder également la portion CN de la seconde pièce comme étant encastrée en C, et sollicitée en N par le même effort. Nous nommerons

x, y les coordonnées horizontale et verticale d'un point quelconque de la courbe affectée par les pièces, comptées à partir du point C;

c la distance AC;

c' la distance BC;

f l'abaissement AM du point M;

f' l'abaissement BN du point N;

ω l'angle que la tangente de la portion de courbe CM forme en C avec l'axe horizontal Cx;

Π' l'effort que l'extrémité de l'une des pièces exerce sur l'autre aux points N, n.

ε et ρ auront les significations indiquées n° 276.

On aura en premier lieu, pour la partie GN de la première pièce Mn,

$$\varepsilon\frac{d^2y}{px^2}=\Pi(c-x)-\Pi'(c'-x),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=\Pi\left(cx-\frac{x^2}{2}\right)-\Pi'\left(c'x-\frac{x^2}{2}\right)+\text{tang.}\,\omega,$$

$$\varepsilon y=\Pi\left(\frac{cx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-\Pi'\left(\frac{c'x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+x\,\text{tang.}\,\omega.$$

On aura ensuite pour la partie MN de la même pièce

en déterminant les constantes de manière que, pour $x=c'$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et y soient égales à celles qui seraient données par les équations précédentes,

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=\Pi(c-x),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=\Pi\left(cx-\frac{x^2}{2}\right)-\Pi'\frac{c'^2}{2}+\text{tang.}\omega,$$

$$\varepsilon y=\Pi\left(\frac{cx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-\Pi'\left(\frac{c'^2x}{2}-\frac{c'^3}{6}\right)+x\,\text{tang.}\omega.$$

On aura enfin pour la partie CN de la seconde pièce mN,

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=\Pi'(c'-x),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=\Pi'\left(c'x-\frac{x^2}{2}\right)-\text{tang.}\omega,$$

$$\varepsilon y=\Pi'\left(\frac{c'x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-x\,\text{tang.}\omega.$$

La première et la dernière des valeurs de y doivent également, en y faisant $x=c'$, donner $y=f'$. Donc

$$\varepsilon f'=\Pi\left(\frac{cc'^2}{2}-\frac{c'^3}{6}\right)-\Pi'\frac{c'^3}{3}+c'\,\text{tang.}\omega,$$

$$\varepsilon f'=\Pi'\frac{c'^3}{3}-c'\,\text{tang.}\omega.$$

L'équilibre de l'une et de l'autre pièce autour du point C exige d'ailleurs que l'on ait

$$\Pi c=2\Pi' c'.$$

On déduit de ces trois équations

$$\Pi'=\Pi\frac{c}{2c'},$$

$$\text{tang.}\,\omega = -\Pi\frac{(c-c')c'}{12},$$

$$f' = \frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{(3c-c')c'^2}{12};$$

et en substituant les valeurs de Π et tang. ω dans l'équation appartenant à la partie MN de la première pièce, puis faisant $x=c$, on trouvera pour l'abaissement AM du point extrême M,

$$f = \frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{c(2c^2-2cc'+c'^2)}{6}.$$

Si, au lieu des deux pièces Mn, Nm, qui se croisent sur la longueur Nn, on n'avait qu'une seule pièce Mm, supportée en C, et chargée aux deux extrémités du poids Π, la flèche de courbure serait, d'après le n° 55, $\frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{c^3}{3}$. L'effet du croisement des deux pièces est de diminuer la flèche de courbure, et d'autant plus que l'intervalle Nn est plus grand. Si les deux pièces se croisent sur toute leur longueur, c'est-à-dire si $c'=c$, la formule précédente donne, comme cela doit être, $f=\frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{c^3}{6}$.

On a respectivement, pour les parties CN et MN de la première pièce, et pour la partie BC de la seconde pièce,

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \Pi\left(\frac{c}{2}-x+\frac{cx}{2c'}\right),$$

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(c-x);$$

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \Pi\left(\frac{c}{2}-\frac{cx}{2c'}\right).$$

Lorsque $c' = \frac{1}{2}c$, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est constante dans tous les points de la partie CN de la pièce Mn; en sorte que la pièce est courbée dans cette partie suivant un arc de cercle dont le rayon est $\frac{\varepsilon}{\Pi} \cdot \frac{2}{c}$, et que cette pièce est également disposée à rompre dans tous les points de cette même partie. Si c' est $< \frac{1}{2}c$, la pièce Mn tend à rompre en N, et si c' est $> \frac{1}{2}c$, elle tend à rompre en C. On connaîtra les conditions de la rupture, conformément au n° 275, en posant dans le premier cas

$$\rho = \Pi(c - c'),$$

et dans le second

$$\rho = \Pi \frac{c}{2}.$$

Si, au lieu des deux pièces qui se croisent, on n'avait qu'une seule pièce Mm supportée en C, et chargée aux extrémités des poids Π, on devrait avoir, d'après le n° 82, $\rho = \Pi c$. On jugera, d'après les équations précédentes, dans quel rapport le croisement des pièces rend le système plus solide.

531. Les résultats précédents s'appliqueront immédiatement au système représenté figure 144, chargé de la manière indiquée n° 529, et feront connaître la quantité dont les quatre poids Π feront fléchir les pièces, ou la valeur qu'il faudrait donner à ces poids pour en opérer la rupture.

Si les points d'appui A, A' sont placés au quart des côtés du cadre, on a $c' = \frac{c}{2}$, et

$$\rho = \Pi \frac{c}{2}.$$

Ainsi le système présente alors une force double de celle de deux pièces ayant une longueur égale à la distance des côtés du cadre, quoique le volume du bois ne soit que de moitié en sus plus grand. Dans la réalité, la force du système dont il s'agit ne serait pas tout-à-fait double de celle des deux pièces, parce que les bois sont affaiblis aux points d'assemblage, qui sont précisément ceux où ils tendent à rompre.

532. Si l'on suppose que la section transversale des pièces est un rectangle dont la largeur soit a, ρ sera proportionnel à a. D'un autre côté, si la hauteur des pièces est réglée de manière que la relation qui, d'après les formules précédentes, doit exister entre ρ, c et c', soit satisfaite, cette relation le sera encore si l'on vient à augmenter dans un même rapport les quantités a, c et c'. Donc si l'on fait varier dans un même rapport toutes les dimensions horizontales de la fig. 144, sans changer la hauteur des pièces, la valeur du poids 4Π capable d'opérer la rupture demeurera constamment la même.

533. Si le système de quatre pièces, représenté figure 144, était chargé par des poids répartis dans toute l'étendue du cadre, on trouverait par des calculs semblables aux précédents les conditions de l'équilibre. On ne s'arrêtera pas davantage sur ces recherches, qui n'offrent pas de difficultés, et dont il suffit d'avoir indiqué les principes.

De la flexion et de la rupture des plans élastiques.

534. L'objet que l'on se propose en construisant les planchers de la troisième espèce, indiqués au commencement de cet article, est de former une masse pleine, comprise entre deux plans parallèles, et dont

toutes les parties sont, autant qu'il est possible, liées les unes aux autres. Les lois de la résistance d'un tel corps, en le supposant homogène dans toutes ses parties, ont été recherchées (*a*); mais comme l'exposition de ces recherches serait très-longue, et supposerait la connaissance de méthodes analytiques qui n'ont pas encore passé dans les ouvrages et les cours destinés à l'instruction des ingénieurs, on rapportera seulement les résultats les plus simples, et qui paraissent les plus utiles.

535. Considérons un plan supporté horizontalement sur un cadre rectangulaire fixe, et supposons un poids Π placé au centre de ce plan. Nommons

a, b les deux côtés du cadre,

h l'épaisseur du plan,

f l'abaissement du centre du plan, où est placé le poids Π;

E ayant la signification indiquée n° 47.

On aura

$$f=\frac{48\Pi a^3 b^3}{\pi^4 E h^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(a^2+b^2)^2}+\frac{1}{(a^2+3^2b^2)^2}+\frac{1}{(a^2+5^2b^2)^2}+\text{etc.}\\ \frac{1}{(3^2a^2+b^2)^2}+\frac{1}{(3^2a^2+3^2b^2)^2}+\text{etc.}\\ \frac{1}{(5^2a^2+b^2)^2}+\frac{1}{(5^2a^2+3^2b^2)^2}+\text{etc.}\\ \text{etc.}\end{array}\right\}$$

π représentant le rapport de la circonférence au diamètre. La flèche de courbure est réciproque au cube

(*a*) Ces lois ont été exposées pour la première fois par l'auteur, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1820.

de l'épaisseur du plan; et pour des plans de figures semblables, elle est proportionnelle à la deuxième puissance des côtés.

536. Le plan étant chargé de la même manière, et le côté a étant le plus petit des deux côtés a et b, si l'on veut, comme au n° 322, que les fibres placées aux faces convexe et concave du plan ne supportent pas sur l'unité superficielle, par suite de l'action du poids Π, un effort plus grand que R', il faudra poser l'équation

$$R' = \frac{24\Pi a b^3}{\pi^2 h^2}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1^2}{(a^2+b^2)^2} + \dfrac{3^2}{(a^2+3^2b^2)^2} + \dfrac{5^2}{(a^2+5^2b^2)^2} + \text{etc.} \\ \dfrac{1^2}{(3^2a^2+b^2)^2} + \dfrac{3^2}{(3^2a^2+3^2b^2)^2} + \text{etc.} \\ \dfrac{1^2}{(5^2a^2+b^2)^2} + \dfrac{3^2}{(5^2a^2+3^2b^2)^2} + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

et prendre la valeur de Π, donnée par cette équation, pour la limite des poids dont on peut charger le plan. Cette valeur est proportionnelle au quarré de l'épaisseur du plan. Elle demeure la même lorsque l'on fait varier les côtés a et b dans un même rapport, en sorte qu'elle ne dépend pas de la grandeur absolue des côtés (a).

537. Supposons maintenant le même plan rectangulaire chargé de poids uniformément répartis dans toute son étendue, en désignant par p le poids placé sur l'unité superficielle. On aura

---

(a) Cette proposition, analogue à celle qui est indiquée ci-dessus n° 532, avait été démontrée d'une tout autre manière par Mariotte. Voyez ses OEuvres, tome II, page 168.

$$f=\frac{192\,p\,a^4b^4}{\pi^6\,E\,h^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1.1(a^2+b^2)^2}-\frac{1}{1.3(a^2+3^2b^2)^2}+\frac{1}{1.5(a^2+5^2b^2)^2}-\text{etc.}\\ -\frac{1}{3.1(3^2a^2+b^2)^2}+\frac{1}{3.3(3^2a^2+3^2b^2)^2}-\text{etc.}\\ +\frac{1}{5.1(5^2a^2+b^2)^2}-\frac{1}{5.3(5^2a^2+3^2b^2)^2}+\text{etc.}\\ -\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

La flèche de courbure est encore réciproque au cube de l'épaisseur du plan. Si le poids p porté par l'unité superficielle est constant, cette flèche est, pour des plans de figures semblables, proportionnelle à la 4e puissance du côté. Si le poids total pab est constant, la flèche est proportionnelle à la 2e puissance du côté.

538. Le plan étant chargé de la manière qui vient d'être indiquée, et le côté a étant le plus petit des deux côtés a et b, si l'on veut que les fibres placées aux faces convexe et concave du plan ne supportent pas, sur l'unité superficielle, un effort plus grand que R', il faudra poser l'équation

$$R'=\frac{96pa^2b^4}{\pi^4h^2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1(a^2+b^2)^2}-\frac{1}{3(3^2a^2+b^2)^2}+\frac{1}{5(5^2a^2+b^2)^2}-\text{etc.}\\ -\frac{3}{1(a^2+3^2b^2)^2}+\frac{3}{3(3^2a^2+3^2b^2)^2}-\frac{3}{5(5^2a^2+3^2b^2)^2}+\text{etc.}\\ +\frac{5}{1(a^2+5^2b^2)^2}-\frac{5}{3(3^2a^2+5^2b^2)^2}+\frac{5}{5(5^2a^2+5^2b^2)^2}-\text{etc.}\\ -\text{etc.}\end{array}\right\}$$

et prendre la valeur de p qui y satisfait pour la limite des poids dont on peut charger l'unité superficielle du plan élastique. Cette valeur est proportionnelle au quarré

de l'épaisseur du plan. Le poids total pab dont le plan pourrait être chargé ne varie pas lorsque l'on fait varier les côtés a, b dans un même rapport, et ne dépend pas de la grandeur absolue de ces côtés.

463. Ces résultats peuvent être appliqués aux planchers du genre de ceux dont il s'agit; mais comme les parties de ces planchers ne présentent pas la liaison et l'homogénéité d'un corps continu, on ne doit pas leur attribuer, dans les applications, une force aussi grande que l'indiqueraient les formules précédentes.

Règles pratiques pour l'établissement des planchers.

539. D'après M. Rondelet (*a*), les solives d'un plancher étant espacées tant plein que vide, la hauteur des bois doit être le $\frac{1}{24}$ de la portée. Cette règle s'accorde sensiblement avec les indications données par d'autres architectes.

L'espacement ordinaire des poutres sur lesquelles portent les solives est de 12 pi. L'équarrissage de ces pièces doit être le $\frac{1}{18}$ de la portée.

540. M. Tredgold (*b*) distingue deux sortes de planchers : 1° les planchers simples (*single joisted floors*), formés par un rang de solives; 2° les planchers assemblés (*framed floors*), formés par des poutres, avec lesquelles on assemble transversalement des poutres plus petites, qui supportent les solives. Ces petites

(*a*) Art de bâtir, tome IV, page 133.

(*b*) *Elementary principles of carpentry*, page 61 et suiv.

poutres reçoivent en outre, par dessous, d'autres solives d'un faible équarrissage, sur lesquelles sont clouées les lattes du plafond.

Les solives sont généralement espacées à un pied (mesure anglaise) de milieu en milieu. Dans les planchers simples, nommant

a, b la largeur et la hauteur des pièces, en pouces;
c la portée, en pieds;

les dimensions des solives, dont la largeur ne doit pas être au-dessous de 2 pouces, se règlent en faisant

$$b = 2,2\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ pour le bois de sapin,}$$

$$b = 2,3\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ pour le bois de chêne.}$$

Dans les planchers assemblés : 1° supposant les poutres espacées à 10 pieds, distance qui ne devrait jamais être dépassée, on prendra pour ces pièces

$$b = 4,2\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ ou } a = 74\frac{c^2}{b^3} \text{ pour le sapin,}$$

$$b = 4,34\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ ou } a = 82\frac{c^2}{b^3} \text{ pour le chêne.}$$

2°. Pour les petites poutres transversales assemblées aux poutres principales, dont l'espacement doit être de 4 à 6 pieds, on prendra

$$b = 3,42\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ ou } a = 40\frac{c^2}{b^3} \text{ pour le sapin,}$$

$$b = 3,53\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ ou } a = 44\frac{c^2}{b^3} \text{ pour le chêne.}$$

3°. Les dimensions des solives supérieures se règlent

conformément à ce qui a été dit ci-dessus. La largeur des solives inférieures, qui ne servent qu'à fixer les lattes, ne doit pas dépasser 2 pouces. La hauteur de ces pièces se règle par les formules

$$b = 0,64\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ pour le sapin,}$$

$$b = 0,67\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ pour le chêne.}$$

ARTICLE XIII.

De la résistance des parois des vases à la pression des fluides.

541. La pression des fluides s'exerce perpendiculairement à la surface des parois des vases. Dans le cas d'un fluide élastique, la grandeur de cette force peut être supposée constante dans toute l'étendue de la paroi. Dans le cas d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur, les parties les plus basses sont plus fortement pressées que les autres, et il est nécessaire, le plus souvent, d'avoir égard à cette différence.

542. Les parois des vases sont généralement formées par des substances solides. Ce sont des corps susceptibles de résister aux changements de figure auxquels ils pourraient être sollicités par l'effet de la pression des fluides, mais qui cèdent un peu à cette pression, en raison de l'extensibilité ou de la compressibilité de leurs parties. Il y a quelquefois un tel rapport entre la figure de la paroi, et la grandeur des pressions normales exercées dans ses diverses parties, que cette paroi ne tend pas, à proprement parler, à changer de figure,

mais est seulement sollicitée à s'étendre ou à se comprimer dans le sens de la surface. On désignera ce cas en disant que la paroi est tracée suivant la *surface d'équilibre*. Quand il a lieu, la paroi peut être formée d'une substance parfaitement flexible, telle que serait un tissu de fils, dont les parties seraient capables de résister à la compression ou à l'extension, mais ne résisteraient pas à la flexion. L'équilibre est stable si toutes les parties de la surface sont étendues, et la seule chose qu'il importe de connaître est la grandeur de la tension qu'elles supportent.

On ne peut présenter ici d'une manière complète et générale la recherche des effets qui se manifestent dans une paroi pressée par un fluide, mais les notions que l'on exposera suffiront dans la plupart des applications. On considérera successivement une ligne et une surface sollicitées par des forces qui leur sont dirigées perpendiculairement.

De l'équilibre d'une ligne sollicitée par des forces perpendiculaires à sa direction.

543. Les conditions de l'équilibre d'une ligne considérée comme un fil parfaitement fléxible, à tous les points duquel sont appliquées des forces normales, peuvent être déduites de ce qu'on a vu dans les nos 226 et 344. On peut également les trouver directement comme il suit.

Considérons d'abord une courbe MM' (fig. 146) tracée sur un plan, dans lequel sont dirigées les forces appliquées normalement à cette courbe. On peut la regarder comme un polygone d'un nombre infini de côtés, et supposer les forces appliquées aux sommets du po-

lygone. Nommons

ds la longueur d'un élément mn de l'arc de la courbe, ou d'un côté du polygone;

ρ la longueur du rayon de courbure au point m;

F la valeur de la force normale appliquée au point M, pour une unité de longueur mesurée sur l'arc de la courbe;

T la force avec laquelle le côté mn du polygone est tendu.

L'équilibre du polygone exige que la force appliquée à chaque sommet m soit détruite par les tensions des éléments mn, mn'. La force appliquée en m est $F\,ds$, et la direction de cette force partage en deux parties égales l'angle nmn'. Donc 1° la tension du côté mn' doit être égale à la tension T du côté mn; et 2° le rapport de T à $F\,ds$ est celui du sinus de l'angle fmn ou fmn', qui diffère infiniment peu d'un angle droit, au sinus de l'angle infiniment petit compris entre mn et mn' dont la valeur est $\frac{ds}{\rho}$. Il suit de là 1° que la valeur de la tension T doit être la même pour tous les côtés du polygone, ou que le fil est également tendu dans toutes ses parties; 2° que l'on doit avoir en chaque point

$$\frac{F\,ds}{T} = \frac{ds}{\rho}, \quad \text{ou } F = \frac{T}{\rho}.$$

La pression normale est en chaque point égale à la tension divisée par le rayon de courbure. Si le fil ne forme pas une courbe fermée, il faut que les derniers éléments MN, M'N' soient tirés dans le sens de leur longueur avec des forces égales à la tension T.

544. Considérons présentement une courbe à double

courbure, sur laquelle agissent également des forces normales. On peut la regarder comme un polygone dont les côtés sont infiniment petits, et dans lequel trois côtés consécutifs ne sont pas compris dans un même plan. Les forces seront appliquées à chaque sommet du polygone, suivant la direction du rayon du cercle osculateur. Tout ce qui a été dit dans le n° précédent s'applique à ce système; il suffit, pour l'équilibre du fil, qu'il soit également tendu dans toutes ses parties, et c'est ce qui aura lieu si la force normale appliquée à chaque point est égale à la tension divisée par le rayon de courbure (*a*).

545. Lorsque des forces sont appliquées perpendiculairement à une verge courbe solide, et qui ne cède à l'action de ces forces que par un changement de figure très-petit, dû à l'élasticité, il n'est pas nécessaire, pour que l'équilibre subsiste, que les conditions énoncées ci-dessus soient remplies. La tension exercée dans le

---

(*a*) On conçoit nettement l'existence de l'équilibre dans un fil formant une courbe à double courbure, en se rappelant que, d'après un théorème démontré par Lancret (Mémoires présentés à la première classe de l'Institut, tome I, p. 420), on peut toujours faire passer par une courbe quelconque une surface développable telle que cette surface étant développée, la courbe donnée y tracerait une ligne droite. Cette surface, nommée *surface rectifiante*, est formée par les intersections successives des plans qui, touchant la courbe, sont perpendiculaires aux rayons des cercles osculateurs de cette courbe. Il suit de là qu'il existe toujours une surface, perpendiculaire aux rayons de courbure de la courbe donnée, sur laquelle cette courbe est une ligne de plus courte distance. Donc le fil pourra toujours être regardé comme étant tendu sur la surface d'un corps solide fixe, où il demeure en équilibre, et où il exerce en chaque point une pression normale.

sens de la longueur de la courbe peut varier d'un point à l'autre. Quant à la manière de connaître la tension longitudinale qui a lieu dans un point quelconque, on remarquera qu'une verge sollicitée par des forces normales ne peut, en général, demeurer en équilibre à moins que ces forces ne se détruisent réciproquement, ou à moins que la verge ne soit maintenue par deux points fixes, si elle forme une courbe plane, ou par trois points fixes, si elle forme une courbe à double courbure. Les efforts exercés sur les points fixes seront déterminés par la condition qu'étant composés avec les forces appliquées normalement à tous les points de la courbe, il en résulte un système susceptible d'être réduit à deux forces égales et directement opposées. La tension des diverses parties de la verge est produite à la fois par les forces normales appliquées à tous les points, et par les forces particulières, appliquées à des points déterminés, et nécessaires pour établir l'équilibre.

Cela posé, si dans une verge courbe MM' (fig. 147) sollicitée de la manière qui vient d'être indiquée, et qui forme une courbe non fermée, on veut connaître la tension longitudinale supportée par l'élément mn, on remarquera que cette tension résulte de ce que les forces appliquées aux deux parties mM, mM' de la courbe se détruisent réciproquement au moyen de la liaison que l'élément mn établit entre ces deux parties. Par conséquent si l'on décompose parallèlement à la tangente de la courbe au point m, toutes les forces appliquées à la partie mM, ou bien toutes les forces appliquées à la partie mM', la somme des composantes ainsi obtenues sera la tension cherchée.

546. Considérons présentement une courbe fermée

plane MN (fig. 148), sollicitée par des forces normales dirigées dans le plan de cette courbe, et supposons que l'on demande la tension supportée par l'élément mn. Si l'on décompose toutes les forces appliquées à la courbe parallèlement à la direction de la tangente au point m, on remarquera que les points m, m' dans lesquels la direction de la tangente est la même, partagent la courbe en deux parties, dans chacune desquelles les forces normales produisent des composantes dirigées dans des sens opposés. Si l'on prend les résultantes des composantes parallèles à mn fournies respectivement par les forces agissant dans les parties $m\mathrm{M}m'$ et $m\mathrm{N}m'$, on obtiendra deux forces égales entre elles et directement opposées. La destruction de ces forces produit la tension des deux éléments $mn, m'n'$: on connaîtra donc ces deux tensions, en décomposant l'une des résultantes dont on vient de parler en deux forces dirigées suivant mn et $m'n'$.

547. Admettons que la figure de la verge MN soit à double courbure, et supposons également que toutes les forces appliquées à la courbe aient été décomposées parallèlement à la tangente menée au point m. Si l'on conçoit la courbe proposée enveloppée par un cylindre dont les arêtes soient parallèles à cette tangente, il y aura un point m' pour lequel le plan tangent à ce cylindre sera parallèle au plan tangent mené par le point m. Les deux points m, m' partageront comme ci-dessus la courbe en deux parties, dans chacune desquelles les forces normales produiront des composantes parallèles à mn dirigées en sens opposés. Si l'on prend respectivement les résultantes des composantes fournies par chaque partie de la courbe, on trouvera deux forces égales et directement opposées, dont la des-

il est appliqué suivant une direction normale à la surface. La valeur de la pression exercée au point m sera $\frac{T}{\rho}$, en désignant par ρ le rayon de courbure de la courbe du fil au point m. Si l'on conçoit maintenant le corps supprimé, et que l'on ait appliqué à tous les points m des forces normales égales à $\frac{T}{\rho}$, l'équilibre subsistera. On remarquera qu'il n'est pas nécessaire que les forces T aient des valeurs égales pour tous les fils : il suffit que la tension soit constante dans l'étendue de chaque fil.

Si maintenant on place autrement les points M, N sur la courbe, on pourra former de la même manière un second système de lignes de plus courte distance, et tendre de nouveaux fils qui croiseront les premiers. Si un nouveau fil passant par le point m est tendu par la force T', il produira en ce point une pression normale égale à $\frac{T'}{\rho'}$, ρ' représentant le rayon de courbure de la courbe du nouveau fil au point m, et cette pression s'ajoutera à celle produite par le premier fil. Par conséquent, le corps étant supprimé, on maintiendra maintenant l'équilibre en appliquant au point m une force normale égale à $\frac{T}{\rho} + \frac{T'}{\rho'}$.

En continuant ainsi, on voit que l'on peut tendre sur le corps un nombre indéfini de fils appartenant à divers systèmes de lignes de plus courte distance. La seule condition nécessaire pour l'équilibre est que la tension de chaque fil soit la même dans tous ses points. Si l'on nomme T, T', T'', etc. les tensions respectives des fils qui se croisent au point quelconque m, et ρ, ρ', ρ'', etc. les rayons de courbure des courbes de ces fils au

point m, la pression normale exercée en ce point sera $\frac{T}{\rho}+\frac{T'}{\rho}+\frac{T''}{\rho''}+$ etc. Il est évident d'ailleurs qu'à chaque point p du contour de la surface, doivent être appliquées dans la direction des divers fils qui partent de ce point, autant de forces respectivement égales aux tensions de ces fils. Toutes ces forces sont dirigées dans le plan tangent à la surface au point p.

Si la surface proposée n'était pas terminée par un contour, et formait une enveloppe fermée, ce qui précède lui pourrait être appliqué, en considérant que l'équilibre est établi dans des fils tendus sur cette surface, et formant un ou plusieurs systèmes de lignes de plus courte distance. Chaque fil formerait une courbe fermée, la tension serait constante dans toute sa longueur, et la force normale résultant en chaque point du fil de sa tension, serait égale à cette tension divisée par le rayon de courbure de la courbe du fil. La pression normale supportée par le corps en un point quelconque serait la somme des pressions normales produites par les tensions de tous les fils qui se croiseraient en ce point.

549. Il résulte de ce qui précède que, pour qu'une surface flexible sollicitée par des forces normales soit en équilibre, il suffit que l'on puisse décomposer cette surface, au moyen d'un ou plusieurs systèmes de lignes de plus courte distance, en bandes infiniment étroites regardées comme des fils, et que les forces normales appliquées à chaque point intérieur, aussi bien que les forces tangentielles appliquées à chaque point du contour de la surface, étant réparties entre les divers fils, chacun d'eux soit en équilibre. Une surface quelconque parfaitement flexible étant donnée, il y a une

infinité de systèmes de forces, appliquées perpendiculairement aux points intérieurs et tangentiellement aux points du contour, qui peuvent être en équilibre au moyen de cette surface.

550. Considérons une surface parfaitement flexible, maintenue par un contour fixe, et sollicitée par des forces normales telles que la surface est en équilibre et ne tend pas à changer de figure. On peut demander comment l'équilibre est établi, quelle tension la surface supporte en chaque point suivant une direction déterminée, et quels sont les efforts exercés sur chaque point du contour fixe. Cette question n'est pas, en général, susceptible de solution, tant que l'on regarde les éléments de la surface comme inextensibles, parce que l'équilibre peut être établi d'une infinité de manières, entre lesquelles on ne peut choisir. Mais si l'on suppose les éléments de la surface extensibles, la question est déterminée.

Du cas où une surface sollicitée par des forces normales est également tendue dans tous les sens.

551. Soit une surface parfaitement flexible et inextensible, sollicitée par des forces normales, et supposons l'équilibre établi entre ces forces, et les efforts de tension qui ont lieu dans le sens de la surface. Admettons que l'on ait tracé sur la surface une ligne quelconque de plus courte distance, et considérons la portion de la surface formée par une bande dirigée suivant cette ligne, et ayant une largeur constante et très-petite : cette bande sera tendue suivant sa longueur avec une certaine force. Cela posé, on dit qu'une surface est également

tendue dans tous les sens, 1° si la tension de la bande est constante dans toutes les parties de sa longueur, 2° si la valeur de cette tension est la même, quelle que soit la direction de la ligne de plus courte distance suivant laquelle la bande est tracée.

Soit λ la largeur de la bande, qui doit être supposée infiniment petite, et θ la valeur de sa tension longitudinale, qui le sera également : le rapport $\frac{\theta}{\lambda} = T$ représente la tension des parties de la surface rapportée à l'unité linéaire. La quantité finie T donne la mesure de la force avec laquelle la surface est tendue.

552. Soit N N (fig. 150) une portion du contour d'une surface également tendue dans tous les sens. Il est nécessaire, pour que l'équilibre soit maintenu, que des forces dirigées dans le plan tangent à la surface, soient appliquées à chaque point du contour. On peut regarder ce contour comme étant composé de parties infiniment petites bc, dont la longueur est égale à λ, et supposer que les forces distribuées sur l'intervalle bc sont appliquées au milieu a de cet intervalle. On peut également regarder la surface comme étant formée d'une infinité de fils ou bandes infiniment étroites, dirigées suivant les rayons du demi-cercle décrit des points a avec le rayon $\frac{1}{2}\lambda$. Les forces tangentielles appliquées à chaque point a devront faire équilibre aux tensions des bandes partant de ce point. Soit $mnqp$ deux des bandes dont il s'agit, dont les directions forment avec la normale ad des angles ω. La largeur pq de ces bandes sera $\frac{\lambda}{2}d\omega$, leur tension $T\frac{\lambda}{2}d\omega$, et la résultante des tensions des deux bandes, $T\lambda d\omega . \cos.\omega$. La somme de toutes les résul-

tantes semblables, ou l'intégrale $T\lambda\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega.\cos.\omega$, dont la valeur est $T\lambda$, est la force qui doit être appliquée au point a. Ainsi l'équilibre d'une surface également tendue dans tous les sens avec la force T, exige que des forces égales entre elles soient appliquées perpendiculairement au contour de la surface dans tous les points de ce contour, et que la valeur de ces forces, pour une unité de longueur, soit T.

553. Étant donnée la figure d'une surface considérée comme un tissu parfaitement flexible et inextensible, il existe toujours un système de forces appliquées normalement à tous les points intérieurs, par l'effet duquel la surface serait maintenue en équilibre, et également tendue dans tous les sens. Soit M (fig. 151) un des points de la surface, et supposons que l'on ait décrit de ce point comme centre, et d'un rayon infiniment petit, égal à $\frac{\lambda}{2}$, un cercle. Considérons une des bandes infiniment étroites $mnpq$, tracées suivant les directions des lignes de plus courte distance qui se croisent au point M. Désignons par r le rayon de courbure de la section normale de la surface, faite au point M dans la direction de l'axe de cette bande, et par ω l'angle de cette section avec le rayon fixe AM. La largeur mn ou pq de la bande sera $\frac{\lambda}{2}d\omega$, et la force avec laquelle elle est tendue, $T\frac{\lambda}{2}d\omega$. Ainsi regardant cette bande comme un fil isolé, on la maintiendrait en équilibre en appliquant au point M, perpendiculairement à la surface, une force dont la valeur, rapportée à l'unité

de longueur, serait, d'après les numéros 530 et 531, $T.\frac{\lambda}{2}d\omega.\frac{1}{r}$; et pour l'intervalle $mnpq$, $T\frac{\lambda}{2}d\omega.\frac{1}{r}.\lambda$, ou $T.\frac{\lambda^2}{2}.\frac{1}{r}d\omega$. Si l'on considère également une autre bande $m'n'p'q'$ dirigée perpendiculairement à la première, en désignant par r' le rayon de courbure de la section normale faite dans la surface suivant la direction de la nouvelle bande, on aura de même $T.\frac{\lambda^2}{2}.\frac{1}{r'}d\omega$ pour la valeur de la force qui, étant appliquée sur l'intervalle $m'n'p'q'$ perpendiculairement à la surface, maintiendrait cette nouvelle bande en équilibre. Si l'on prend donc la somme des quantité $T\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)d\omega$ dans une étendue égale au $\frac{1}{4}$ de la circonférence à compter du point A, on aura la somme des forces qui, étant appliquées normalement à la surface, dans l'étendue du cercle décrit du point M, font équilibre à la tension de toutes les bandes qui se croisent en ce point. Or on sait que la valeur de la quantité $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ est indépendante de l'angle ω, et qu'en nommant ρ, ρ' les deux rayons de courbure principaux de la surface pour le point M, cette valeur est $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}$. Donc l'intégrale cherchée est $T\frac{\pi\lambda^2}{2.2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)$. La surface du cercle décrit du point M avec le rayon $\frac{1}{2}\lambda$ étant d'ailleurs $\frac{\pi\lambda^2}{4}$, on voit donc que la quantité

$$T\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)$$

représente la valeur de la force normale qui doit être

appliquée au point M (cette valeur étant rapportée à l'unité superficielle), pour que la surface soit également tendue dans tous les sens avec la force T (*a*).

554. Si les deux rayons de courbure étaient égaux et de même signe, propriété qui appartient à la sphère, la force dont il s'agit serait $\frac{2T}{\rho}$. On voit par là que la même pression normale qui pourrait produire une tension T dans le sens des éléments circulaires d'une surface cylindrique, produirait dans tous les sens une tension $\frac{1}{2}$T dans une surface sphérique de même diamètre.

Applications à des vases de diverses figures.

555. Nous considérerons en premier lieu des vases contenant un fluide qui exerce du dedans au dehors une pression, et dont les parois sont planes. Ces parois sont généralement tendues dans la direction de la surface, en même temps qu'elles supportent une pression normale. Le cas le plus simple est celui d'un tuyau rectiligne dont les parois sont formées par des plans parallèles à l'axe de ce tuyau; par exemple le tuyau rectangulaire AH (fig. 152), que l'on suppose ouvert par les deux bouts. Les parois ne sont point tendues dans le sens de la longueur du tuyau, mais dans le sens de sa largeur seulement. Considérant une partie mq' de ce tuyau, on peut regarder les portions $mnn'm'$ et $pqq'p'$ des faces inférieure et supérieure, comme étant tendues respectivement, parallèlement aux côtés mm', pp', par l'effet des pressions opposées qui s'exer-

(*a*) Il est aisé de voir que l'on parviendrait au même résultat, en considérant toute autre figure dont le point M serait le centre.

cent sur les portions $mnqp$, $m'n'q'p'$ des faces latérales, avec une force égale à la moitié de la pression exercée sur chacune de ces dernières portions. De la même manière, chacune des portions mq, $m'q'$ sera tendue parallèlement à mp, $m'p'$ avec une force égale à la moitié de la pression exercée dans l'étendue mn' ou pq'. L'une quelconque des portions de paroi dont il s'agit, telle que $mnqp$, peut donc être regardée comme une pièce qui est à la fois tendue suivant sa longueur, pressée par des forces normales distribuées uniformément sur cette longueur, et supportée sur ses deux extrémités. On peut lui appliquer l'analyse du n° 489, et régler la force de la paroi d'après l'équation du n° 490. c désignera la moitié de la longueur mp; Q, la moitié de la pression normale exercée sur mn' ou pq'; p, la valeur de la pression normale exercée sur $mnqp$ pour une unité linéaire mesurée sur la longueur mp.

556. Si le tuyau était fermé par les deux bouts, ou par un bout seulement, ce qui précède ne pourrait plus être rigoureusement appliqué. Mais, en procédant comme il vient d'être dit, on connaîtrait une limite d'après laquelle on serait assuré de donner à chaque paroi une force plus que suffisante. Considérons, par exemple, un vase quadrangulaire et vertical ABGH (fig. 153), ouvert par la face supérieure, dont le fond repose sur un plan horizontal fixe, et qui est rempli d'un fluide pesant. Si le fond du vase n'existait pas, on pourrait appliquer à chaque élément transversal mq' ce qui a été dit dans le n° précédent, en faisant attention que la pression du fluide augmentant avec la profondeur, ces éléments ont à supporter des efforts d'autant plus grands qu'ils sont placés plus loin de la surface supérieure du fluide. Mais si le fond du vase existe,

comme ce fond attache les unes aux autres les quatre parois latérales, il empêche qu'il ne s'établisse, dans le sens des longueurs *mn* des éléments, des tensions aussi grandes, et que ces éléments ne se courbent autant en cédant à la pression normale. Le résultat du calcul indiqué ci-dessus donnera donc, pour les parties des parois, des épaisseurs qui surpasseront d'autant plus les épaisseurs réellement nécessaires que ces parties seront plus voisines du fond du vase.

557. Si le vase était entièrement fermé, les parois seraient tendues suivant plusieurs directions. Si, par exemple, le vase rectangulaire AH (fig. 153) est fermé par les deux bouts, et contient un fluide pressant du dedans au dehors, l'une quelconque AF des faces est tendue suivant deux directions parallèles aux arêtes AB et AE. Cette face peut être regardée comme appartenant à un tuyau rectangulaire dont l'axe est parallèle à AB, ou à un autre tuyau rectangulaire dont l'axe est parallèle à AE. Si l'on considère successivement ces deux tuyaux en les supposant ouverts par les deux bouts, et si l'on applique ce qui a été dit n° 555, on obtiendra des résultats d'après lesquels la force de la paroi AF se trouverait nécessairement fixée au-delà de ce qui est nécessaire. L'excès de force qui lui serait donné, si l'on adoptait ces résultats, serait d'autant plus grand que la longueur des tuyaux serait moindre par rapport aux dimensions transversales.

La recherche du véritable état d'équilibre des parois, dans des cas de ce genre, comporte une analyse particulière, qui ne peut être exposée ici.

558. Si les parois, au lieu d'être planes, étaient formées par des portions de surface cylindrique, on pourrait faire usage des notions précédentes, en appliquant

les résultats présentés ci-dessus, article VI, sur la résistance des pièces courbes.

559. Considérons maintenant un vase dont la paroi est courbe, et en premier lieu un tuyau rectiligne ouvert par les deux bouts. Supposons que le fluide contenu dans ce tuyau exerce sur tous les points d'une même section transversale des pressions égales, ou que l'on peut supposer égales sans erreur sensible, comme dans le cas où les gaz ou l'eau coulent dans des tuyaux d'un petit diamètre. La paroi du tuyau n'est pas tendue dans le sens de sa longueur, mais seulement dans le sens des sections transversales. Un élément transversal du tuyau peut être regardé comme une bande ou un fil sollicité par des forces normales dirigées dans son plan. Ces forces étant égales dans tous les points, le fil ne peut être en équilibre, à moins que le rayon de courbure n'ait aussi une valeur constante. Ainsi la paroi tendra à changer de figure, à moins que la section transversale du tuyau ne soit circulaire.

La section étant supposée circulaire, soit p la valeur de la pression normale produite par le fluide sur une unité superficielle de la paroi, et considérons un élément transversal du tuyau, dont la longueur, mesurée sur l'axe, soit égale à l'unité linéaire. p représentera également la pression normale exercée sur une unité de longueur de la circonférence de cet élément. Par conséquent, nommant r le rayon du tuyau, on aura, d'après le n° 543, pr pour la tension qui s'établira dans le sens de cette circonférence. Ainsi l'on dira que la surface du tuyau est tendue dans le sens des sections transversales avec la force pr. On voit que la tension résultant d'une même pression normale intérieure croît proportionnellement au rayon du tuyau.

Désignant par h l'épaisseur de la paroi, supposée constante, et (comme au n° 124) par R' la plus grande tension que l'on veut faire supporter aux fibres sur l'unité superficielle, on pourra régler l'épaisseur de la paroi en posant l'équation

$$R'h = pr.$$

560. Si la section transversale du tuyau n'était pas circulaire, la paroi tendrait à changer de figure, et en changerait effectivement si elle était formée par un tissu flexible. Si elle est formée par une substance solide, la figure ne changera pas totalement, mais sera légèrement modifiée par l'effet de l'élasticité de cette substance. La matière de la paroi est alors sollicitée de deux manières, 1° par l'effet du changement de courbure, qui étend ou comprime les fibres près des faces extérieures ou intérieures; 2° par l'effet de la tension qui s'établit dans le sens des sections transversales, tension qui varie d'un point à l'autre de ces sections, et qui étend les fibres dans toute l'épaisseur de la paroi. La modification que supportent les parties par l'effet du changement de courbure est, dans la plupart des applications, peu considérable; elle peut être déterminée au moyen des principes exposés ci-dessus, article VI. Quant à l'effet de la tension causée par la pression du fluide, qu'il importe ordinairement le plus de considérer, soit MN (fig. 154) la section transversale du tuyau, et supposons que l'on veuille connaître la tension supportée par cette section dans le point m. On mènera la tangente mp, et une autre tangente nq parallèle à la première. On remarquera ensuite, conformément au n° 546, que les pressions normales exercées par le fluide sur les portions de courbe mMn ou

mNn, décomposées parallèlement aux lignes mp, nq, équivalent aux pressions exercées sur la ligne pq, qui leur est perpendiculaire; d'où il suit que l'on aura la tension exercée en m, en prenant la moitié de la pression que le fluide exercerait sur pq. On voit que la tension des diverses parties de la paroi est proportionnelle à la distance des deux tangentes mp, nq.

561. Si le tuyau rectiligne dont il s'agit était fermé par un bout, la résistance du fond s'opposerait au changement de figure de la paroi, et à l'extension des sections transversales. Cette paroi serait donc sollicitée moins fortement, surtout dans la partie voisine du bout fermé. Il en serait de même, à plus forte raison, si le tuyau était fermé par les deux bouts. Mais, dans ce dernier cas, en vertu de la pression du fluide contre les deux bases du tuyau, la paroi supporterait une tension dans le sens des arêtes de la surface cylindrique, en même temps qu'elle en supporterait une dans le sens des sections transversales. Si la section transversale du tuyau est circulaire, on a, en conservant les dénominations du n° 559, $p.\pi r^2$ pour la pression exercée sur les fonds opposés, et par conséquent $\frac{p.\pi r^2}{2\pi r}$, ou $\frac{pr}{2}$ pour la force avec laquelle une portion de la circonférence du tuyau égale à l'unité linéaire est tendue dans le sens des arêtes. Ainsi, la pression du fluide étant supposée uniforme dans toute l'étendue du tuyau, la tension qui a eu lieu dans le sens des arêtes est la moitié de celle qui a lieu dans le sens des sections transversales. Si la section transversale du tuyau n'était pas circulaire, la tension qui aurait lieu dans le sens des arêtes serait encore moindre par

rapport à celle qui aurait lieu dans le sens des sections transversales.

562. Soit un vase cylindrique d'une longueur indéfinie, dont l'axe est horizontal, et qui contient un liquide pesant. MAN (fig. 155) représentant la section transversale de ce vase, et MN le niveau de la surface du fluide, la pression normale qui aura lieu en un point quelconque *m* de la section sera proportionnelle à la distance *mp*. Par conséquent, si la paroi du vase est formée par un tissu flexible, la condition de l'équilibre, conformément au n° 543, sera que le rayon de courbure au point *m* soit réciproque à la distance *mp*, ce qui détermine la nature de la courbe MAN. En rapprochant ce qui vient d'être dit des nos 47 et 55, on verra que la figure de cette courbe est celle qu'affecterait un ressort homogène, d'une largeur et d'une épaisseur uniforme, dont la figure naturelle est rectiligne, et qui serait tenu plié, au moyen d'une corde attachée au point M au point N. La courbe est également tendue dans tous ses points, et on connaîtrait la tension en supposant que le poids du fluide contenu dans le tuyau est appliqué au point O, et décomposé suivant les directions des tangentes MO, NO, menées aux points extrêmes. Il est évident que l'équilibre exige que les points M, N soient fixes, ou que la courbe y soit tirée par deux forces égales à sa tension, et dirigées dans le prolongement de ces tangentes.

563. Si la section transversale du cylindre horizontal n'a point la figure qui convient à l'équilibre, et si la paroi est faite d'une matière solide, elle est légèrement fléchie par l'effet de la pression du fluide. L'état de flexion de cette paroi, aussi bien que la tension qui peut

avoir lieu dans le sens de la section transversale, dépendent à la fois de la figure de cette section, et de la manière dont le vase est supporté : on peut les déterminer par les principes exposés dans l'article VI de la présente section.

564. Si le même vase cylindrique était fermé aux deux extrémités, les parties voisines de ces extrémités seraient sollicitées avec moins de force dans le sens des sections transversales. La paroi serait de plus tendue parallèlement à l'axe. La valeur totale de cette tension serait évidemment égale à la pression exercée par le fluide sur chacune des bases du cylindre : mais on ne peut connaître exactement la manière dont cette tension est répartie sur les différentes arêtes de la surface cylindrique, à moins de considérer la paroi courbe et les deux bases comme un seul corps élastique, et d'en déterminer complétement l'état d'équilibre.

565. Lorsqu'un fluide est contenu dans un vase entièrement fermé, et où la pression est égale dans toutes les parties, la paroi, si elle est flexible, ne peut se maintenir en équilibre, à moins que sa figure ne soit celle d'une sphère. Dans ce cas, conformément au n° 543 et 554, nommant p la pression intérieure sur une aire égale à l'unité superficielle, et r le rayon de la sphère, la paroi est tendue dans tous les sens avec la force $\frac{1}{2}pr$; en sorte que, si h est l'épaisseur de cette paroi, on devra, pour s'assurer que cette épaisseur est suffisante, vérifier l'équation

$$R'h = \tfrac{1}{2}pr.$$

Il en serait de même si la paroi, formée d'une substance solide homogène, avait naturellement la figure

sphérique. En effet, la pression du fluide ne tendant point à changer cette figure, la paroi ne peut céder qu'en se dilatant, et elle doit être également tendue dans tous les sens.

566. Lorsque la figure du vase n'est point sphérique, la paroi doit nécessairement être formée d'une substance solide. La pression du fluide tend à en changer la figure, en même temps qu'elle lui fait subir une extension. La recherche de l'état d'équilibre de cette paroi, en général très-compliquée, comporte des considérations qui ne peuvent être exposées ici. Mais en laissant de côté cette recherche, on peut se proposer, dans les applications, de régler l'épaisseur de la paroi de manière que l'on soit assuré qu'elle résistera à l'action du fluide. Pour y parvenir, conformément aux principes énoncés ci-dessus nos 548 et suivants, on concevra que l'on a tracé sur la surface du vase une ligne de plus courte distance dans une direction quelconque, et une bande infiniment étroite d'une largeur uniforme dirigée suivant cette ligne. Regardant ensuite cette bande comme une verge élastique soumise en chaque point à des forces normales dont l'intensité dépendra de la pression du fluide, on pourra déterminer l'état de flexion et de tension de la bande dont il s'agit, d'après les principes de l'article VI cité ci-dessus, et en régler convenablement la force. Or il est évident que si une bande quelconque, ainsi séparée de la surface, présente une résistance suffisante, la paroi formée de la réunion de toutes les bandes présentera une résistance plus que suffisante, puisque leur adhésion mutuelle ne peut que s'opposer à ce qu'elles cèdent à l'action du fluide.

567. Par exemple, si la figure du vase est une sur-

face de révolution, sur laquelle les méridiens sont des lignes de plus courte distance, on pourra considérer un de ces méridiens, la bande infiniment étroite dont il serait l'axe, et régler l'épaisseur de la paroi de manière que cette bande, supposée isolée, résiste à l'action du fluide. La paroi aura alors une résistance plus que suffisante. Si la surface de révolution était une sphère, la force de la paroi, ainsi déterminée, serait précisément double de ce qui serait nécessaire, ainsi qu'on le voit par les nos 543 et 554.

Expériences sur la résistance des vases contenant un fluide qui exerce une pression sur les parois.

568. D'après une expérience de Mariotte (*a*), un cylindre en fer-blanc, ayant un pied de diamètre, et une longueur qui n'est pas indiquée, mais qui paraît avoir été de un à deux pieds, dont les deux bases étaient formées par des platines de cuivre avec lesquelles le fer-blanc était soudé, a supporté sans rompre la pression d'une colonne d'eau de 90 pieds de hauteur. Il a rompu après quelque temps dans une soudure sous la pression d'une colonne d'eau de 100 pieds. L'épaisseur du fer-blanc n'est pas indiquée; mais l'auteur établit un rapprochement entre la résistance de cette matière dans son expérience, et la résistance d'une bande de fer-blanc de trois lignes de largeur qui avait supporté une tension de 120 livres.

569. D'après une autre expérience du même au-

(*a*) Traité du mouvement des eaux; Œuvres de Mariotte, tome II, page 471.

teur (*a*), un vase de plomb en forme de baril, ayant 18 pouces de longueur, un pied de diamètre au milieu, 8 pouces aux deux extrémités, et 2 $\frac{1}{2}$ lignes d'épaisseur, terminé par des bases planes faites avec le même plomb, a supporté sans rompre la pression d'une colonne d'eau de 100 pieds de hauteur. Les platines se courbèrent de plus de 1 $\frac{1}{2}$ pouce. Le plomb ayant été limé au milieu de la hauteur du baril, dans une étendue de 6 pouces de longueur et 4 de largeur, et l'épaisseur réduite à un peu moins d'une ligne au milieu de ce qui était limé, le plomb céda dans cet endroit, et il s'y fit une fente.

570. D'après deux expériences de M. Jardine d'Edimburgh (*b*), un tuyau de plomb de 1 $\frac{1}{2}$ pouce anglais de diamètre, $\frac{1}{3}$ pouce d'épaisseur, a supporté sans altération apparente la pression d'une colonne d'eau de 1000 pieds de hauteur, et s'est rompu sous celle d'une colonne d'eau de 1200 pieds.

Un autre tuyau de la même épaisseur et de 2 pouces de diamètre, a supporté sans altération apparente la pression d'une colonne d'eau de 800 pieds, et a rompu sous celle d'une colonne d'eau de 1000 pieds.

571. D'après une expérience de l'auteur, un vase sensiblement sphérique, en tôle de fer de très-bonne qualité, formé de deux demi-sphères assemblées par des rivets et une soudure et se recouvrant l'une l'autre de $0^m,01$, ayant $0^m,337$ de diamètre extérieur dans le sens du grand cercle suivant lequel la soudure était faite, $0^m,323$ dans le sens perpendiculaire à ce grand cercle,

(*a*) *Idem*, p. 472.

(*b*) Citées dans les Annales de chimie et de physique, mars 1826.

et $0^m,0026$ d'épaisseur, a été rompu sous la pression de 144 kil. par centimètre quarré. La rupture s'est manifestée par une petite fente, à $0^m,05$ de la soudure.

D'après une autre expérience, un vase semblable, ayant $0^m,285$ de diamètre dans le sens du grand cercle suivant lequel la soudure était faite, $0^m,279$ dans le sens opposé, et $0^m,0024$ d'épaisseur, a été rompu sous la pression de 163 kil. par centimètre quarré. La rupture s'est également manifestée par une petite fente, à $0^m,12$ de la soudure.

572. Le résultat des expériences de Mariotte ne peut être soumis au calcul, à raison de l'incertitude de la première, et de la figure compliquée du vase dans la seconde. En appliquant aux deux expériences de M. Jardine la formule indiquée ci-dessus n° 559, on trouve que le plomb a été rompu par des efforts de $1^k,37$ et $1^k,58$ par millimètre quarré. Ces expériences s'accordent donc entièrement avec les résultats des expériences directes rapportés ci-après. Si l'on applique également aux deux expériences de l'auteur sur des vases sphériques le calcul indiqué ci-dessus n° 565, en adoptant le plus grand des deux diamètres, on trouve que la tôle a été rompue par des efforts de 46 et 47 kil. par millimètre quarré. Ce résultat s'accorde également avec les expériences directes rapportées ci-après, qui ont été faites sur de la tôle d'une moindre qualité.

SUPPLÉMENT.

NOTA. On a cherché à rassembler dans cet ouvrage les résultats des expériences sur la résistance des matériaux dont la connaissance a paru utile aux constructeurs. On trouvera ci-dessous plusieurs résultats de ce genre, qui n'ont pu être insérés à leur place, parce qu'ils ont été publiés pendant l'impression du présent volume, commencée dans les derniers mois de l'année 1823.

Résistance du fer forgé à l'extension.

(Voyez page 17 et suivantes.)

573. Résultats des expériences de M. Séguin aîné sur des pièces de fer forgé tirées dans le sens de la longueur. Ces expériences ont été faites au moyen d'un levier (*a*).

INDICATION DES FERS.	LARGEUR des pièces.	ÉPAISSEUR des pièces.	POIDS produisant la rupture.	POIDS supporté par millimètre quarré.
	millimètres.	millimètres.	kilogrammes.	kilogram.
Fer de Saint-Chamond, fait au laminoir.....	16	8	5611	43,8
Idem.....	10	8	4133	51,7
Idem, ayant $0^m,01$ de diamètre.			3743	48
Fer de Bourgogne.....	13	13	5226	30,4
Idem, chauffé au rouge suant et refroidi lentement.....	13,5	13,5	5435	29,7
Idem, coupé au milieu, soudé bout à bout, sans étirer...	13,3	13,3	5280	29,7
Idem, coupé au milieu, soudé en sifflet, et étiré.....	10,15	10,15	5688	55,2
Idem, plus étirée que la précédente, sans soudure.....	4,5	4,5	1238	61
Fer dit *ruban*, très-doux.....	20,3	1,7	1541	44,7

(*a*) Des ponts en fil de fer, 2e édition, pages 84 et 100.

Indication des pièces.	Largeur.	Épaisseur.	Poids produisant la rupture.	Poids supporté par millimètre quarré.
	millimèt.	millimètres.	kilogram.	kilogram.
Tôle tirée dans le sens du laminage	9	1,5	488	36,1
Idem	6,3	1,5	374	39,6
Idem	7,3	2,6	823	43,3
Idem	8,3	2,4	905	45,4
Idem	7,8	1,5	461	39,4
Idem	7,3	2,3	686	40,9
Moyenne	.....	.....	.....	40,8
Tôle tirée perpendiculairement au sens du laminage	6,1	1,0	241	39,5
Idem	7,2	2,2	531	33,5
Idem	7	1,5	351	33,5
Idem	7,3	1,1	316	39,3
Moyenne	.....	.....	.....	36,4

Les pièces commencent à s'allonger sensiblement sous des poids égaux à la moitié ou aux deux tiers de ceux qui produisent la rupture.

Résistance du fil de fer à l'extension.

(Voyez page 21.)

576. Résultats des expériences de M. Seguin aîné sur des fils de fer tirés dans le sens de la longueur. Les diamètres des fils n'ont pas été mesurés, mais calculés d'après le poids d'une portion de fil d'un mètre de longueur, en supposant que le mètre cube pèse 7780 kil. (*a*).

(*a*) Des ponts en fil de fer, pages 83 et 100.

Indication des fils.	Diamètres.	Poids produisant la rupture.	Poids supporté par millimètre quarré.
	millimètres.	kilogrammes.	kilogrammes.
Fil de fer de Bourgogne, n° 8, recuit inégalement	1,172	41,3	38,2
Idem, n° 7, recuit exactement	1,062	31,4	36,1
Idem, n° 18, non recuit	3,366	505,6	56,8
Idem, n° 7, non recuit	1,062	65,5	73,7
Fil de l'Aigle, employé pour la carderie.	0,2294	3,72	89,8
Passe-perle, assez doux	0,5917	23,6	85,7
Fil provenant d'une manufacture de Besançon, n° 1, doux	0,6188	25,96	86,1
2, doux	0,7078	34,25	87
3, cassant	0,7327	34,12	80,8
4, cassant	0,838	42,3	76,6
5, très-cassant	0,9115	47,25	72,3
6	1,022	62,56	76,1
7	1,08	65,25	71,2
8, très-cassant	1,123	66,75	67,3
9, assez cassant	1,293	91,74	69,8
10, très-doux	1,435	105	64,8
11, très-doux	1,476	100,25	58,6
12	1,691	124,8	55,5
13	1,8	145,5	57,2
14, très-doux, sans ressort.	2,072	166,5	49,3
15	2,226	202	51,9
16, très-doux	2,489	311	63,9
17, pailleux	2,695	389	68,1
18	3,087	617	84
19	3,492	750	78,2
20	4,14	874,75	65,7
21	4,812	1138	62,5
22, très-cassant	5,449	1579	67,7
23, doux	5,942	1738,5	62,6

577. Résultats des expériences de M. Dufour sur des fils de fer tirés dans le sens de la longueur. Les diamètres des fils ont été mesurés avec exactitude. Les nombres sont les moyennes de plusieurs expériences sur chaque sorte de fil (*a*).

(*a*) Description du pont suspendu en fil de fer construit à Genève, page 8 et suivantes.

Indication des fils.	Diamètres.	Poids produisant la rupture.	Poids supporté par millimètre quarré.
	millimètres.	kilogrammes.	kilogrammes.
Fils provenant de la fabrique de la Ferrière, n° 4	0,85	48	84,4
13	1,9	196	69,1
17	2,75	382	64,3
19	3,7	776	72,2
Fils provenant de la fabrique de St.-Gingolf, n° 4	0,85	38,5	67,7
13	1,9	178	62,8
17	2,75	349	49,4
19	3,7	644	59,9

578. Quelques expériences faites à une température de 6 à 8° au-dessous de zéro ayant paru indiquer que le froid faisait perdre aux fils une petite partie de leur force ($\frac{1}{13}$ ou $\frac{1}{23}$), on a fait passer un fil de la fabrique de la Ferrière n° 4 dans des manchons, où il était refroidi à 22° $\frac{1}{2}$ au-dessous de zéro, ou échauffé à 92° au-dessus. Ces variations de température n'ont paru avoir aucune influence sensible sur la force du fil (*a*).

579. La force du fil de fer recuit a été trouvée d'un peu plus de la moitié de celle du fil non recuit.

580. La force des fils indiqués ci-dessus n'était pas diminuée lorsqu'on les pliait sur un cylindre de 0m,04 de diamètre (*b*).

(*a*) Description du pont suspendu en fil de fer construit à Genève, page 23.

(*b*) *Idem*, page 18.

Résistance du fil de laiton à l'extension.

581. Résultats des expériences de M. Dufour sur des fils de laiton tirés dans le sens de la longueur (*a*).

Indication des fils.	Diamètres.	Poids produisant la rupture.	Poids supportés par millimètre quarré.
	millimètres.	kilogrammes.	kilogrammes.
Fil n° 4, mou, qui peut se nouer.....	0,85	48,5	85,2
Idem, recuit.....		23,5	
Fil n° 13, dur, cassant.....	1,9	117,5	41,4
Idem, recuit.....		84	
Fil n° 13.....		187,5	66,1
Idem, recuit.....		100,5	

Résistance de divers métaux à l'extension.

(Voyez ci-dessus, page 23.)

582. Résultats des expériences faites par l'auteur sur des pièces tirées dans le sens de la longueur.

Indication des substances.	Largeur.	Épaisseur.	Poids produisant la rupture.	Poids supporté par millimètre quarré.
	millimètres.	millimètres.	kilogrammes.	kilogrammes.
Cuivre rouge laminé.....	11,2	1,2	269	20
Idem.....	11,6	1,8	463	22,2
Moyenne.....	.....	.....	.....	21,1
Plomb laminé.....	30,4	3,3	166	1,65
Idem.....	20,2	3,3	116	1,74
Idem.....	14,7	3,3	78	1,61
Idem.....	31,2	2,4	63	0,84
Idem.....	29,6	2,4	86	1,21
Idem.....	16,5	2,4	41,3	1,04
Moyenne.....	.....	.....	.....	1,35

(*a*) Description du pont suspendu en fil de fer construit à Genève, pages 12, 23.

Les pièces de cuivre ont commencé à s'étendre sous des charges qui étaient égales à la moitié environ, et celles de plomb sous des charges qui étaient entre la moitié et les $\frac{2}{3}$ de celles qui ont causé la rupture.

Résistance du verre à l'extension.

583. Résultats des expériences faites par l'auteur sur des pièces tirées dans le sens de la longueur.

Indication des pièces.	Diamètre intérieur.	Diamètre extérieur.	Poids produisant la rupture.	Poids supporté par millimètre quarré.
	millimètres.	millimètres.	kilogrammes.	kilogrammes.
Tube de verre.....	2,3	4,85	44,4	3,1
Idem.....	3,45	7	71,9	2,47
Idem.....	3,45	6,95	65,9	2,3
Idem.....	2.45	5,6	40,4	2,03
Tige pleine, en verre.....	.....	6,45	54,9	1,68
Partie de la même tige.....	.....	6,55	110	3,26
Tige pleine, en cristal.....	.....	9,6	164	2,27
Moyenne.....	.....	.....	.....	2,48

Résistance de la pierre à la flexion.

(Voyez ci-dessus, page 35.)

584. Résultats des expériences faites par M. Tredgold sur des barres rectangulaires en marbre et en pierre, posées horizontalement sur deux appuis, et chargées au milieu (*a*).

(*a*) *The philosophical Magazine and Journal*, vol. 56, page 290.

Indication des pièces.	Distance des appuis.	Largeur des pièces.	Épaisseur des pièces.	Charge au milieu.	Flèche de courbure.
	pouces.	pouce.	pouce.	livres.	pouce.
Marbre blanc statuaire, très-pur. Pesanteur spécifique, 2,706..	30	1,075	1,075	10	0,02
				20	0,045
				30	0,06
Pierre calcaire de Portland, brune. Pesant. spécifique, 2,113...	24	2	1,45	10	0,01
				20	0,015
				30	0,02
				40	0,022
Grès blanc siliceux, de Long-Annet. Pesant. spécifique, 2,212...	18	1,45	1,525	20	0,015
				30	0,02
				40	0,022
				50	0,025
				60	0,03

Résistance du fer forgé à la flexion.

(Voyez page 40.)

585. Résultats des expériences faites par M. Tredgold sur des barreaux de fer forgé posés horizontalement sur deux appuis, et chargés au milieu (*a*). La longueur des pièces était de 6 pieds anglais, et l'intervalle des appuis de 66 ½ pouces.

(*a*) *An Essay on the strength of cast iron*, 2e éd., p. 102

Indication des pièces.	Poids sur 6 pieds de longueur.	Flèche de courbure sous		
		58 livres.	114 livres.	170 livres.
	livres.	pouces.	pouces.	pouces.
Fer anglais, barreau quarré de 1,25 pouce.....	33	0,0625	0,1	0,1875
Idem, de 1,125 pouce.....	25	0,125	0,25	0,375
Idem, de » pouce	20	0,15	0,32	0,5
Idem, barreau rond, de 1,25 po.	24	0,125	0,25	0,375
Idem, de 1 pouce.....	17	0,25	0,5	0,8
Fer de Suède, barreau quarré de 1,2 pouce	32	0,0625	0,125	0,19
Idem, de 1,125 pouce.....	27	0,08	0,161	0,25
Idem, de 1 pouce	33	0,125	0,25	0,375

La valeur de E, calculée d'après les expériences sur le fer anglais, diffère très-peu de celle indiquée ci-dessus n° 70. La valeur moyenne de la même quantité, calculée d'après les expériences sur le fer de Suède, est E = 23 470 000 000 kil.

586. Autre expérience sur une barre de 38 pouces de longueur, pesant 10,4 livres, d'un pouce anglais d'équarrissage, posée sur des appuis dont l'intervalle était de 3 pieds.

Charge au milieu.	Flèche de courbure.	
	La barre étant telle que la fabrique l'avait fournie.	La barre ayant été chauffée également, et lentement refroidie.
livres.	pouces.	pouces.
126	0,05	0,059
352	0,1	0,117
310	0,12	0,145
330	0,13	0,154

La charge de 330 livres ne produisait pas d'altéra-

tion, mais 20 livres de plus donnaient une courbure permanente sensible; 10 livres de plus en donnaient également une à la barre adoucie au feu.

587. La même barre ayant été portée à la température de 212° Fahrenheit, puis refroidie à 60°, parut prendre sous la charge de 300 livres, une flèche de $\frac{1}{20}$ environ plus grande à la première température qu'à la seconde.

Résistance de l'acier à la flexion.

(Voyez page 42.)

588. Résultats de quelques expériences faites par M. Tredgold sur des barreaux d'acier posés horizontalement, et chargés au milieu (*a*). Les nombres sont donnés en mesures anglaises.

Indication des pièces.	Distance des appuis.	Largeur des pièces.	Épaisseur des pièces.	Charge au milieu.	Flèche de courbure.
	pouces.	pouce.	pouce.	livres.	pouce.
1. Acier forgé, passé à la filière, trempé et adouci au degré d'une lime ordinaire.....	13	0,95	0,375	54 82 110	0,02 0,03 0,04
2. Acier doux, cédant aisément à la lime..	24	0,92	0,36	18,6 37 47	0,5 0,1 0,127

589. La première barre présenta les mêmes flexions sous les mêmes charges, 1° lorsque sa trempe eut été abaissée à un rouge de paille intense; 2° lorsque sa

(*a*) *Repertory of arts and manufactures*, mai 1825.

trempe eut été abaissée au bleu d'acier; 3° lorsqu'elle eut été chauffée au rouge et refroidie très-lentement, la charge de 110 livres ne produisant pas alors de courbure permanente; 4° lorsque la pièce eut été durcie de nouveau, et rendue très-dure. Dans ce dernier état une charge de 350 livres produisit une flèche permanente de 0po,005, qui augmenta de 0po,005 par une addition de 10 livres. La barre rompit sous une charge de 580 liv.

La deuxième barre présenta également les mêmes flexions sous les mêmes charges, 1° lorsqu'elle eut été durcie, de manière que la lime n'y faisait pas d'impression; 2° après que la trempe eut été abaissée jusqu'à la couleur de paille uniforme. Dans cet état une charge de 130 livres ne produisit pas de courbure permanente, mais la charge de 150 liv. en produisit une. La barre rompit sous 385 livres.

Résistance du fer fondu à la flexion.

(Voyez ci-dessus, page 43.)

590. Résultats moyens de nouvelles expériences faites par M. Tredgold sur des barres de fer fondu posées horizontalement sur deux appuis, et chargées au milieu (*a*). Les nombres sont donnés en mesures anglaises.

(*a*) *Practical Essay on the strength of cast iron*, 2e édition, page 76 et suivantes.

Pièces soumises à l'expérience.	Intervalle des appuis.	Largeur des pièces.	Hauteur des pièces.	Charge au milieu.	Flèche de courbure.
	pouces.	pouce.	pouce.	livres.	pouce.
1. Trois pièces fournies par M. Bramah.....	36	0,9	0,9	40	0,041
2. Deux pièces de vieux fer de Park.....	33	1,3	0,65	60	0,1
3. Deux pièces de fer d'Adelphi.....	33	1,3	0,65	60	0,1
4. Deux pièces de fer d'Alfreton.....	33	1,3	0,65	60	0,1
5. Deux pièces provenant de vieille fonte..	33	1,3	0,65	60	0,09
6. Mélange de vieux fer de Park et de bonne vieille fonte, en parties égales.....	33	1,3	0,65	72	0,1
7. Mélange de fer avec $\frac{1}{16}$ de cuivre.....	33	1,25	0,675	60	0,1

Une charge de 180 livres agissant pendant plusieurs heures ne fit prendre aux trois pièces sous le n° 1 qu'une courbure presque insensible.

Les pièces sous les n°s 2, 3 et 4 n'ont pas été altérées sous des charges de 162 livres, et ont conservé de très-petites courbures après avoir supporté des charges de 182 livres.

Les pièces sous le n° 5 n'ont pas été altérées sous 180 livres, et l'ont été à peine sous 190 livres.

Celles sous les n°s 6 et 7 ne l'ont pas été sous 182 livres, et l'ont été un peu sous 202 livres.

Les expériences sous les n°s 1, 2, 3 et 4 donnent pour la valeur moyenne de la constante E, E=11 530 000 000^{k}.

Résistance de la pierre à la rupture.

(Voyez ci-dessus, page 55.)

591. Résultats des expériences faites par M. Tred-

gold sur des barres rectangulaires en marbre et en pierre, posées horizontalement sur deux appuis et chargées au milieu (*a*). Les nombres sont donnés en mesures anglaises.

Indication des pièces.	Distance des appuis.	Largeur des pièces.	Épaisseur des pièces.	Charge qui rompt.
	pouces.	pouces.	pouce.	livres.
Marbre blanc statuaire, très-pur. Pesanteur spécifique, 2,706..	30	1,075	1,075	50
	15	1,08	1,03	110
	14	1,075	1,075	130
Pierre de Portland, brune. Pesanteur spécifique, 2,113. ..	24	2	1,45	100
Grès blanc siliceux. Pesanteur spécifique, 2,212.....	18	1,45	1,525	92
Pierre de Dundée. Pesanteur spécifique, 2,621.....	14	1,45	1,5	414
Grès de Craigleith. Pesanteur spécifique, 2,362.....	14	1,55	1,55	137
Grès de la carrière de Hailes...	14	1,55	1,5	123
Grès de Long-Annet.....	9	1,525	1,45	160
Idem.....	7	1,55	1,55	233
Pierre calcaire de Portland....	12	2,07	1,55	270
Pierre de Bath.....	5,5	1	1	58

Résistance du fer fondu à la rupture.

(Voyez page 64.)

592. Le tableau suivant contient les résultats de quelques nouvelles expériences, publiées par M. Tredgold, sur des barres de fer fondu maintenues horizontalement par une extrémité, et chargées à l'autre extrémité (*b*). Les poids qui causaient la rupture avaient un bras de levier de 2 pieds anglais.

(*a*) *The philosophical Magazine and Journal*, vol. 56, p. 290.
(*b*) *Practical Essay on the strength of cast iron*, 2e éd., p. 80 et suiv.

Indication des pièces.	Largeur des pièces.	Épaisseur des pièces.	Charge qui rompt.
	pouce.	pouce.	livres.
Vieux fer de Park	1,3	0,65	184
Fer d'Adelphi	1,3	0,65	173
Fer d'Alfreton	1,3	0,65	153
Pièce provenant de vieilles fontes	1,3	0,65	168
Mélange de vieux fer de Park, et de bonne vieille fonte, en parties égales	1,3	0,65	174
Mélange de fer avec un $\frac{1}{16}$ de cuivre	1,25	0,675	194

Les cinq premières expériences donnent moyennement pour le fer fondu $R = 31\,740\,000^k$.

Résistance du fer fondu à la rupture causée par la torsion.

(Voyez ci-dessus, page 78.)

593. Le tableau suivant contient les résultats des expériences faites par MM. Bramah, sur des barreaux quarré de fer fondu, encastrés fixement à une extrémité, et tordus par des poids agissant avec un bras de levier de 3 pieds anglais (*a*).

(*a*) *Practical Essay on the strength of cast iron*, page 97.

Indication des pièces.	Longueur des pièces.	Grosseur des pièces.	Poids produisant la rupture.
	pieds.	pouce.	livres.
1. Fonte alliée à $\frac{1}{16}$ de cuivre	1	1 $\frac{1}{16}$	215
2. *Idem*	2	1 $\frac{1}{16}$	213
3. Mélange d'égales parties de vieux fer d'Adelphi et d'Alfreton	1	1 $\frac{1}{16}$	330
4. *Idem*	1	1 $\frac{1}{16}$	310
5. *Idem* (la rupture a été causée par le glissement d'un poids)	2	1 $\frac{1}{16}$	280
6. Fer fondu	1	1	237
7. *Idem*	2	1	218

La valeur moyenne de la constante T, donnée par les expériences 3, 4, 6 et 7, est $T = 25860\,000^{k}$.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

610023

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE SECTION.

De la résistance des corps solides. Page 1

Article Ier. De la résistance des corps à un effort qui tend à produire l'écrasement..... 3
Résistance à l'écrasement de la pierre et de la brique..... *id.*
du plâtre..... 8
du mortier..... *id.*
du bois..... 9
du fer forgé..... 11
du fer fondu..... *id.*
de divers métaux..... 13
Article II. De la résistance des corps à un effort dirigé dans le sens de la longueur, qui tend à produire l'extension et la rupture..... *id.*
Résistance à l'extension de la pierre et de la brique. 14
du plâtre..... *id.*
du mortier..... 15
du bois..... *id.*
du fer forgé..... 17
du fil de fer..... 21
de l'acier..... 22
du fer fondu..... 23
de divers métaux..... *id.*
des cordages..... 24

ARTICLE III. De la résistance d'un corps prismatique à la flexion produite par un effort dirigé perpendiculairement à la longueur de ce corps.... Page 24
Résistance à la flexion du bois..... 35
du fer forgé..... 40
de l'acier..... 42
du fer fondu..... 43

ARTICLE IV. De la résistance d'un solide prismatique à la rupture produite par un effort dirigé perpendiculairement à la longueur de ce solide... 45
Résistance à la rupture de la pierre et de la brique. 55
du mortier..... *id.*
du bois..... *id.*
du fer fondu..... 64
Notions sur les théories de la résistance à la rupture proposées par Galilée, et par Mariotte et Leibnitz..... 68
Remarque sur la théorie de la résistance à la rupture..... 69

ARTICLE V. De la résistance d'un corps prismatique à la torsion..... 71
Résistance du fer forgé à la torsion..... 74

ARTICLE VI. De la résistance d'un corps prismatique à la rupture causée par la torsion..... 76
Résistance du fer fondu à la rupture causée par la torsion..... 78

ARTICLE VII. Des plus grands efforts auxquels les matériaux employés dans les constructions peuvent être exposés avec sécurité..... 81
De la pierre exposée à l'écrasement..... 82
Du bois exposé à l'écrasement et à l'extension... 83
Du bois exposé à la flexion transversale..... 84
Du fer forgé exposé à l'extension..... 85
Du fer forgé exposé à la flexion transversale..... 86

Du fer fondu exposé à l'écrasement et à l'extension. Page 87
Du fer fondu exposé à la flexion transversale..... *id.*

DEUXIÈME SECTION.

De l'équilibre et de la résistance des massifs formés de matières adhérentes. — De l'établissement des murs de revêtement des terres..... 88

ARTICLE Ier. De l'équilibre d'un massif coupé latéralement..... 89

ARTICLE II. De l'équilibre d'un massif terminé par deux faces latérales, dont la surface supérieure est chargée d'un poids..... 93

ARTICLE III. De l'équilibre d'un massif exposé à un effort exercé contre une des faces latérales.... 95
Cas où la rupture s'opère par glissement..... 96
Cas où la rupture s'opère par renversement..... 99
De la figure d'un massif d'égale résistance à la rupture par renversement..... 102

ARTICLE IV. De l'établissement des murs de revêtement qui résistent à la poussée des terres et des eaux..... 103
Pression exercée par les terres contre une paroi plane..... 104
Pression exercée contre une paroi plane quand la surface supérieure des terres est surchargée... 109
Équilibre d'un mur soutenant la poussée des terres. 111
Équilibre d'un mur soutenant la poussée des terres, en supposant ce mur renversé en totalité sur l'arête extérieure de la base..... 115
Équilibre d'un mur soutenant la poussée des terres, en supposant que ce mur peut glisser sur la fondation..... 117

ARTICLE V. De l'établissement des fondations, lorsque les murs sont supportés par des terrains compressibles..... Page 120
ARTICLE VI. Qualités diverses des terres. Évaluation de la pesanteur spécifique, du frottement et de la cohésion..... 122
Des terres déblayées, et réduites en petites parties non cohérentes..... 123
Des terres dans l'état naturel..... 124
Des effets de l'eau pénétrant dans les terres..... 126
Des cas où la nature du terrain varie dans la hauteur du revêtement..... *id.*
Du frottement et de la cohésion dans les maçonneries..... 127

TROISIÈME SECTION.

De l'équilibre et de l'établissement de voûtes.

ARTICLE Ier. Conditions générales de l'équilibre d'un assemblage de voussoirs..... 131
Application à une plate-bande..... 136
Conditions de l'équilibre d'un assemblage de voussoirs, en supposant tous les joints perpendiculaires à la courbe d'intrados..... 139
Cas où les forces appliquées aux voussoirs sont partout normales à la courbe d'intrados..... *id.*
Cas où les forces appliquées à la voûte se réduisent au poids des voussoirs..... 143
ARTICLE II. Principales expériences et observations relatives à l'équilibre des voûtes..... 145
ARTICLE III. De l'établissement des voûtes..... 152
De l'équilibre des voûtes en berceau..... 154
Des pressions exercées contre les plans de joint dans les voûtes en berceau..... 163

De l'usage des tirants de fer pour consolider les voûtes en berceau..... Page 171
De l'équilibre des voûtes en dôme..... 173
De l'usage des ceintures en fer pour consolider les voûtes en dôme..... 177
De l'équilibre des voûtes en arc de cloître et des voûtes d'arête..... 178

ARTICLE IV. Des calculs relatifs à l'établissement des voûtes..... 179

QUATRIÈME SECTION.

De l'équilibre et de l'établissement des constructions en charpente..... 183

ARTICLE Ier. De la résistance d'une pièce prismatique posée horizontalement, chargée et supportée de diverses manières..... 184
Équilibre d'une pièce posée sur deux appuis, et chargée en un point quelconque de l'intervalle des appuis..... 186
Équilibre d'une pièce posée sur deux appuis, et chargée sur une portion de sa longueur..... 188
Équilibre d'une pièce chargée d'un poids, dont l'une des extrémités est encastrée, et l'autre posée sur un appui..... 192
Équilibre d'une pièce dont les deux extrémités sont encastrées, et qui est chargée d'un poids. 195
Équilibre d'une pièce supportée par trois ou un plus grand nombre de points d'appui..... 198
Remarque sur l'usage qu'on faire des résultats précédents dans les applications..... 201

ARTICLE II. De la résistance d'une pièce prismatique

posée verticalement et chargée sur l'extrémité supérieure ..... Page 202
Équilibre d'une pièce chargée verticalement, lorsque l'extrémité inférieure est encastrée, et l'extrémité supérieure libre..... 205
Équilibre d'une pièce chargée verticalement lorsque l'extrémité inférieure est encastrée, et l'extrémité supérieure maintenue dans une même verticale..... 806
Expériences sur la résistance des pièces de bois chargées verticalement..... 207
Expériences sur la résistance des pièces de fer forgé chargées verticalement..... 210
Expériences sur la résistance des pièces de fer fondu pressées dans le sens de la longueur..... 212
Remarques sur l'usage que l'on doit faire des résultats précédents dans les applications..... 213

Article III. De la résistance d'une pièce chargée verticalement, lorsque la direction du poids est distante de l'axe de la pièce..... 217

Article IV. De la résistance d'une pièce prismatique chargée obliquement..... 222
Équilibre d'une pièce inclinée chargée entre les extrémités..... 228

Article V. De la résistance d'une pièce prismatique fléchie, posée horizontalement entre deux appuis, et chargée au milieu..... 230

Article VI. De la résistance des pièces prismatiques dont l'axe est courbe..... 234
Des pièces dont la figure est celle de la courbe d'équilibre..... 235
Cas où les forces appliquées à la pièce sont partout normales à la courbe..... 236
Cas où les forces appliquées à la pièce sont par-

tout verticales..... Page 237
De la flexion des pièces courbes..... 243
Application au cas où la figure de la pièce courbe est une portion de parabole..... 247
De la flexion d'une pièce courbe dont tous les points supportent des poids..... 251
Application au cas où la charge est uniformément distribuée, et où la figure de la pièce courbe est une portion de parabole..... 252
Usage des résultats précédents dans les applications. 255
De l'effet des pressions ou tensions exercées dans le sens de la longueur des pièces courbes pour les accourcir ou les allonger, et des changements de figure qui en résultent..... 259
Expériences sur la résistance des pièces courbes.. 262
Article VII. Des pièces de diverses figures employées dans les constructions. Des pièces formées de plusieurs parties assujetties entre elles..... 264
De la figure de la section transversale 265
De la figure de la section longitudinale 270
Des pièces formées de plusieurs parties assujetties entre elles..... 276
Expériences sur la résistance des pièces formées de plusieurs parties assujetties entre elles..... 281
Des armatures servant à prolonger les pièces, ou à assujettir entre elles des pièces placées dans le prolongement l'une de l'autre..... 283
Article VIII. Des appareils de charpente les plus simples, destinés à supporter ou à élever des poids 286
De l'équilibre des grues 310
Article IX. Des portes d'écluses..... 315
De l'action de la pesanteur sur la charpente des portes d'écluse..... *id.*
Du cas où la charpente des portes est supportée

par une roulette ..... Page 320
De l'action de l'eau sur les traverses des portes d'écluse..... 323
De l'action simultanée du poids de la charpente et de l'eau sur les traverses des portes d'écluses... 326
Des portes courbes..... 327

RTICLE X. Des ponts en charpente 330
Des ponts supportés par des poutres et des contrefiches..... *id.*
De l'action des ponts formés de poutres et de contrefiches sur les piles ou culées..... 344
Des ponts supportés par des arcs..... 346
De la liaison des fermes dans les ponts en charpente. 355

ARTICLE XI. Des cintres en charpente servant à la construction des voûtes 356
Des efforts exercés sur les cintres par l'effet du poids des voussoirs..... 357
De l'établissement des cintres..... 361

ARTICLE XII. Des planchers 364
De la flexion et de la rupture des plans élastiques. 370
Règles pratiques pour l'établissements des planchers 374

ARTICLE XIII. De la résistance des parois des vases à la pression des fluides qu'ils contiennent..... 376
De l'équilibre d'une ligne sollicitée par des forces perpendiculaires à sa direction..... 377
De l'équilibre d'une surface sollicitée par des forces qui lui sont dirigées perpendiculairement..... 382
Du cas où une surface sollicitée par des forces normales est également tendue dans tous les sens. 385
Applications à des vases de diverses figures..... 389
Expériences sur la résistance des vases contenant un fluide qui exerce une pression sur les parois..... 398

Supplément..... Page 401

Résistance à l'extension du fer forgé..... *id.*
de la tôle ou fer laminé..... 402
du fil de fer..... 403
du fil de laiton..... 406
de divers métaux..... *id.*
du verre..... 407
Résistance à la flexion de la pierre..... *id.*
du fer forgé..... 408
de l'acier..... 410
du fer fondu..... 411
Résistance à la rupture de la pierre..... 412
du fer fondu..... 413
Résistance du fer fondu à la rupture causée par la torsion..... 414

Digitized by Google

ERRATA.

Page 11, *ligne* 2e *de la note* (*b*), M. Ketley, *lisez* M. W. Reynolds.

Page 24, *lignes* 3 *et* 4, *d* étant le diamètre d'une corde, *ajoutez* en centimètres.

Page 33, *ligne* 9, $pc\left(\frac{cx^3}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$, *lisez* $pc\left(\frac{cx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$.

Page 51, *ligne* 5, $2P=\frac{2}{c\left(1+\frac{3f^2}{2c^2}\right)}$, *lisez* $2P=\frac{2\rho}{c\left(1+\frac{3f^2}{2c^2}\right)}$.

Page 70, *ligne* 17, l'état solide; *lisez* l'état du solide.

Page 99, *après la* 6e *ligne*, *ajoutez* H la hauteur BE du point d'application de la force Q.

Page 137, *ligne* 21, $+c$ tang. θ', *lisez* $+2c$ tang. θ'.

Page 139, *ligne* 3 *à compter du bas*, *après* ABNM, *ajoutez* (fig. 27).

Page 141, *ligne* 16, la première par $\frac{dx}{ds}$, la seconde par $\frac{dy}{ds}$, *lisez* la première par $\frac{dy}{ds}$, la seconde par $\frac{dx}{ds}$.

Page 144, *ligne* 7, $\frac{d^2y}{dx^2}$, *lisez* $\frac{d^2y}{dx}$.

Idem, *ligne* 8, $\rho=\frac{ds^3}{dx\,d^2y}$, *lisez* $\rho=-\frac{ds^3}{dx\,d^2y}$.

Page 166, *ligne* 9, l'élément de la hauteur du voussoir dv, *lisez* l'élément dv de la hauteur du voussoir.

Page 177, *à la fin de la note*, *ajoutez* On a également placé

des cercles en fer au dôme de Sainte-Geneviève de Paris. Voyez l'Art de bâtir, par M. Rondelet, tome IV, page 527.

Page 185, *ligne* 14, $\rho = P + \frac{1}{2} p c^2$, *lisez* $\rho = P c + \frac{1}{2} p c^2$.

Page 193, *ligne* 2 *à compter d'en-bas*, *lisez*

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -\Pi'(c' - c) = -\Pi \frac{c^2 (c^2 - 4 c c' + 3 c'^2)}{2 c'^3}.$$

Page 323, *ligne* 25, fig. 128, *lisez* fig. 128 *bis*.

Page 204, *ligne* 5 *à compter d'en-bas*, *lisez* $f = \frac{\rho c^2}{i^2 \pi^2 . \varepsilon}$.

Page 229, *ligne* 21, D, *lisez* A.

Page 274, *ligne* 5, B'M', *lisez* B'M.

FIN.

Fig 4.

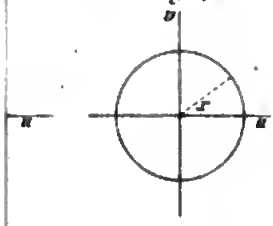


Fig. 5.

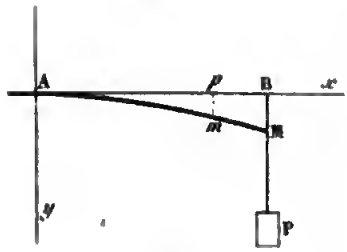


Fig. 8.

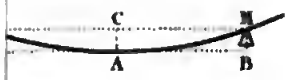


Fig. 9.

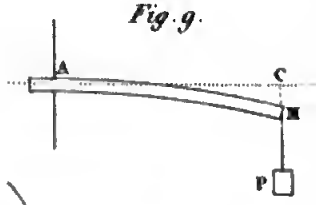


Fig 12

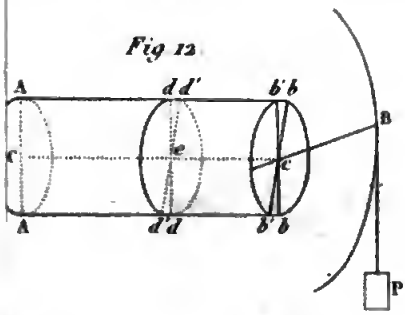
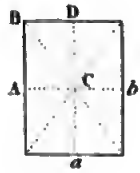


Fig. 13.



g. 17.

Fig. 18.

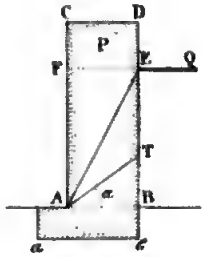


Fig. 19.

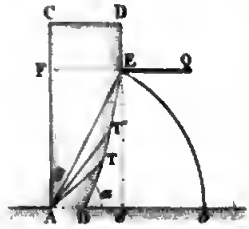


Fig. 23.

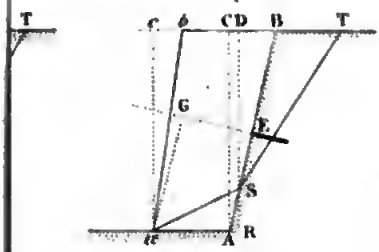
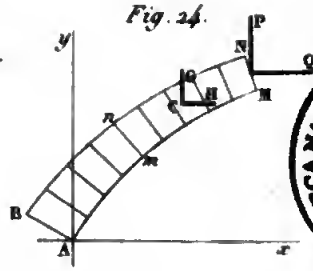


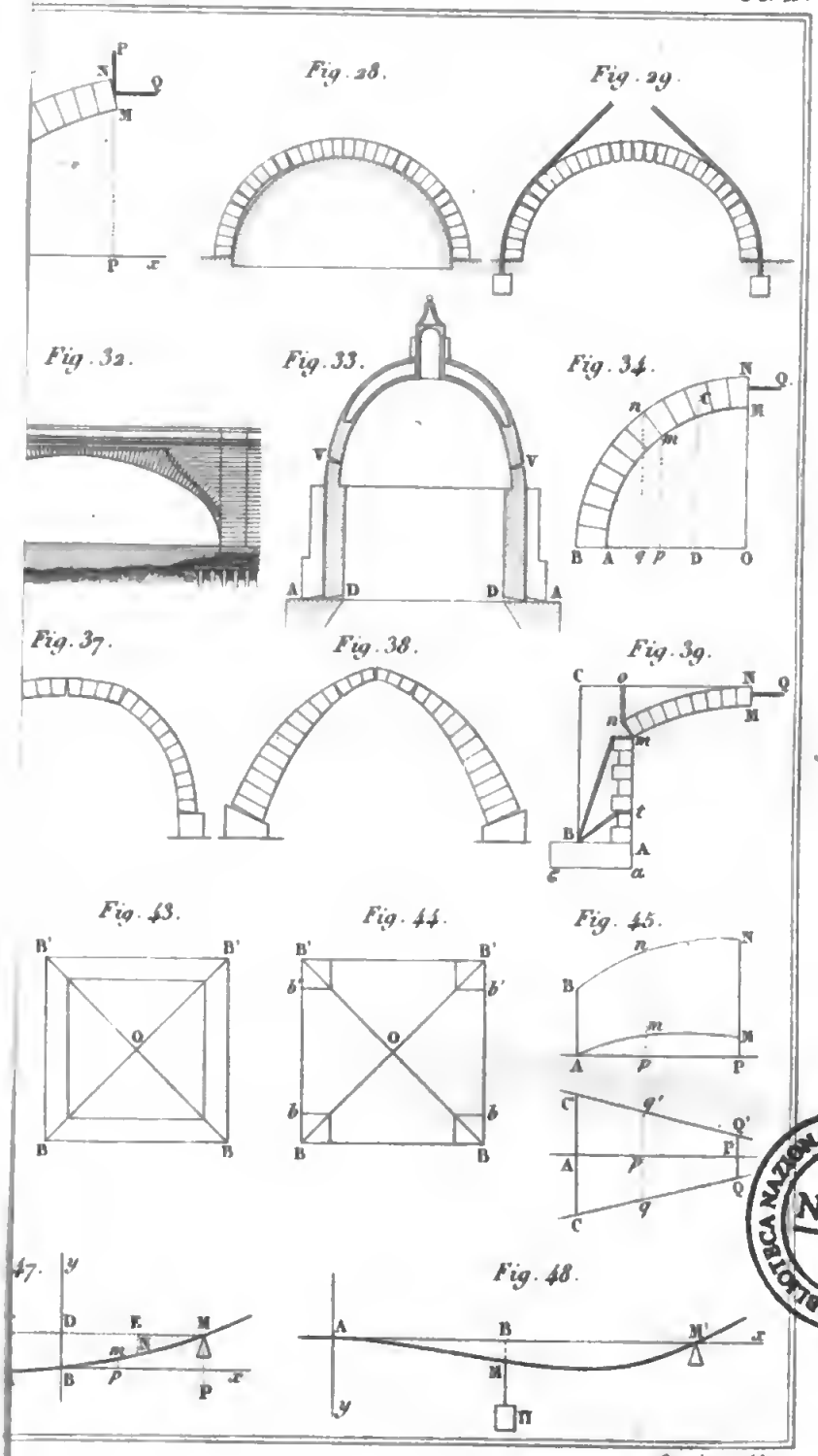
Fig. 24.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Gravé par Adam

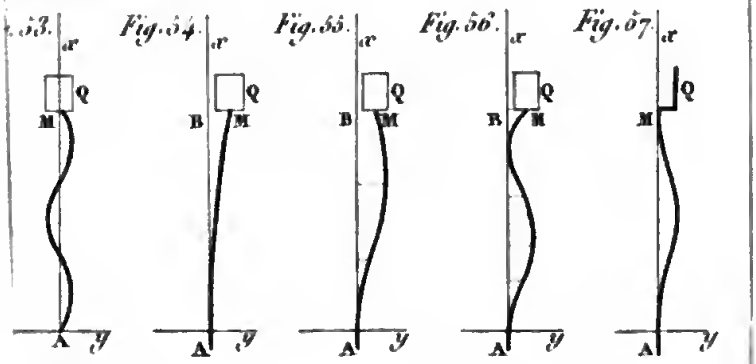
Digitized by Google

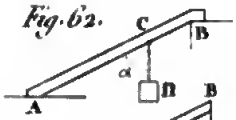


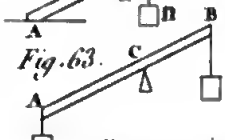
Gravé par Adam.

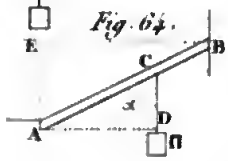
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

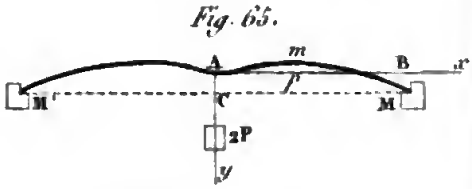
Google

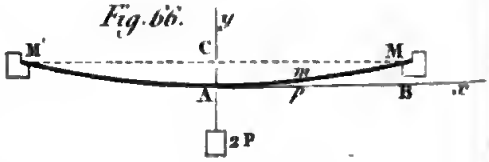


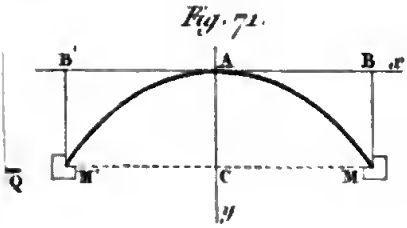


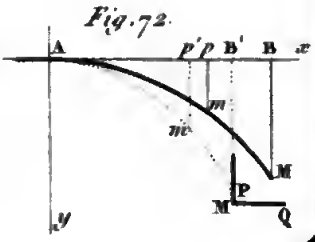


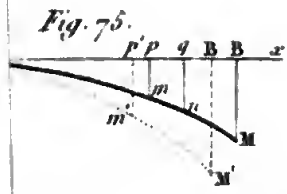


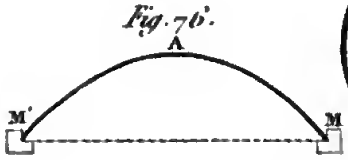


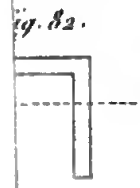


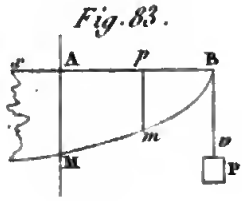


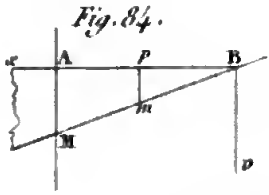








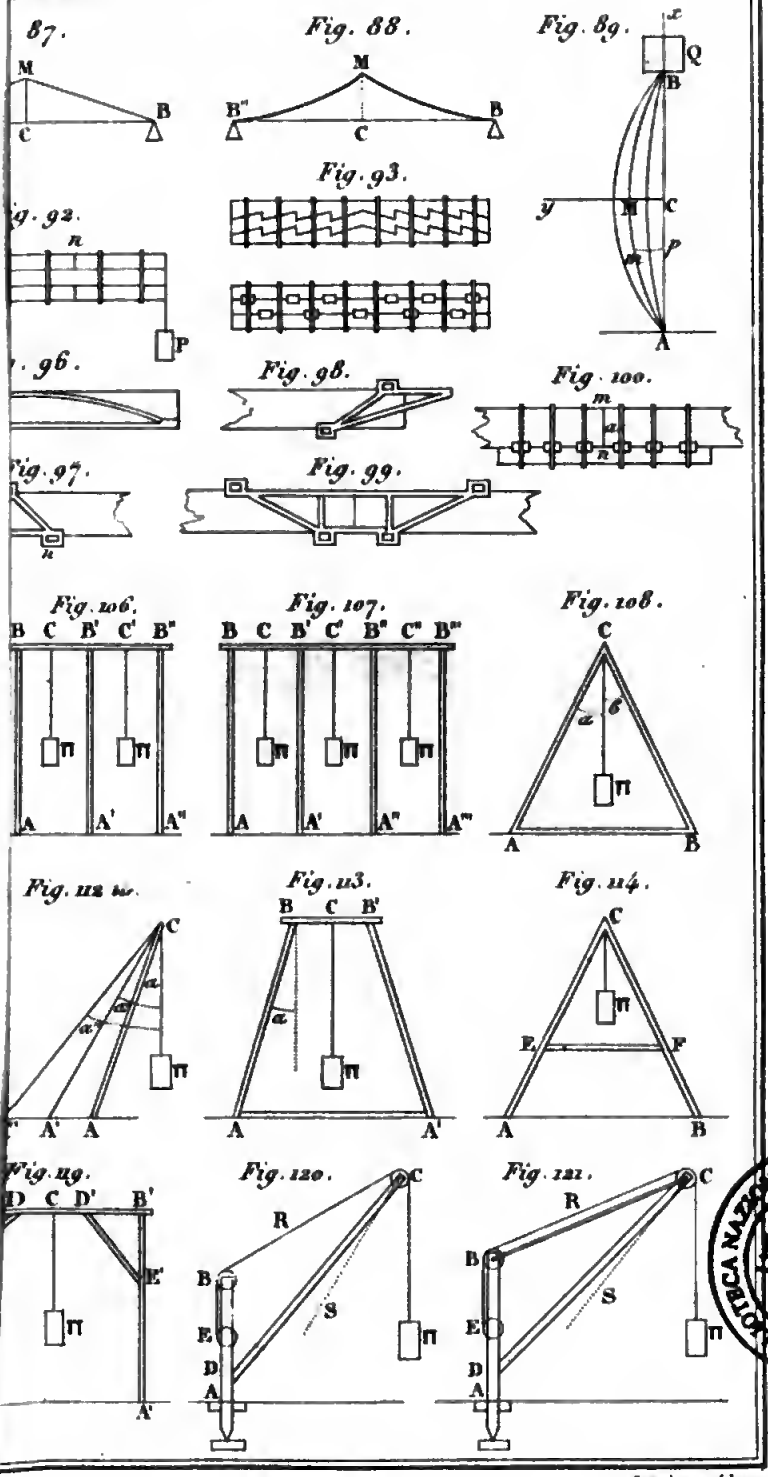




Gravé par Adam.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

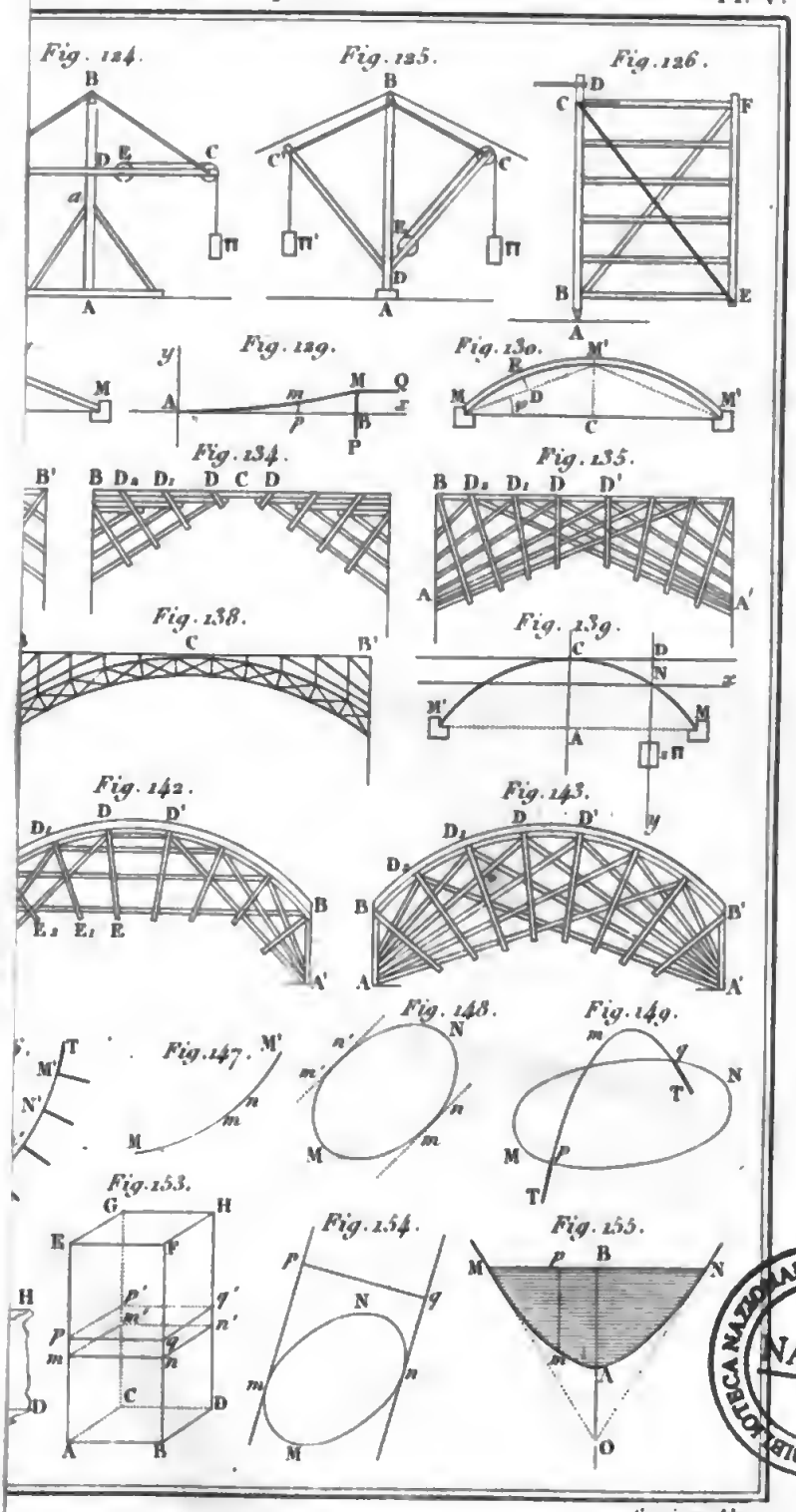
Digitized by Google



Gravé par Adam.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Gravé par Adam.

Digitized by Google

Digitized by Google

Google

Digitized by Google

Digitized by Google